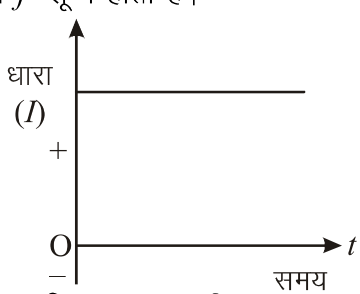
अध्याय–10
प्रत्यावर्ती धारा (Alternating Current)

जब भी किसी परिपथ में वोल्टता का स्त्रोत जोड़ा जाता है तो चालकों में मुक्त इलेक्ट्रॉन यादृच्छिक गति के साथ–साथ निश्चित दिशा में अपवाह गति भी करते हैं। परिपथ के किसी बिन्दु से एकांक समय में प्रवाहित आवेश अर्थात् आवेश प्रवाह की दर को धारा कहते हैं। दिष्ट धारा परिपथों में धारा स्त्रोत सेल या बैटरी होता है तथा प्रतिरोध R द्वारा धारा का नियंत्रण किया जाता है। सामान्यतः विद्युत ऊर्जा प्रत्यावर्ती धारा के रूप में उत्पन्न होती है क्योंकि इसका उत्पादन एवं संचरण कम खर्च में होती है तथा आवश्यकता होने पर इसे आसानी से दिष्ट धारा में परिवर्तित हो सकती है। इसमें धारा तथा वोल्टता अधिकांशतः ज्यावक्रीय रूप में समय के साथ परिवर्तित होती है। इसे नियंत्रित करने के लिए प्रतिरोध(R)के अलावा प्रेरकत्व (L) तथा धारिता (C) का उपयोग भी करते हैं। जब किसी प्रत्यावर्ती परिपथ में R, L तथा C लगाते हैं तो यह आवश्यक नहीं है कि परिपथ में धारा तथा वोल्टता समान कला में हों अर्थात् अधिकतम वोल्टता पर धारा का मान अधिकतम होना आवश्यक नहीं है। प्रत्यावर्ती वोल्टता को कम या अधिक करने के लिए ट्रांसफार्मर का उपयोग किया जाता है। जिससे प्रत्यावर्ती धारा के रूप में लंबी दूरियों तक वैद्युत ऊर्जा का संप्रेषण कम खर्च में तथा कम ऊर्जा हानि द्वारा किया जाता है।

इस अध्याय में हम प्रत्यावर्ती धारा–वोल्टता में कला सम्बन्ध विभिन्न परिपथों में शक्ति–क्षय, वाटहीन धारा, ट्रांसफार्मर आदि का अध्ययन करेंगे।

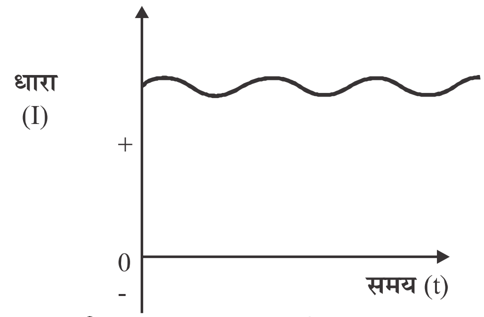
10.1 दिष्ट धारा (Direct Current)

ऐसी धारा (या वोल्टता) जिसके प्रवाह की दिशा व मान समय के साथ परिवर्तित नहीं हो, दिष्ट धारा (या वोल्टता) कहलाती है। यह धारा ऐसे वोल्टता स्त्रोतों से उत्पन्न होती है, जिनके टर्मिनलों की ध्रुवता समय के साथ नियत रहती है। इस धारा के मान को समय के साथ आलेखित करने पर आलेख समय अक्ष के समांतर सरल रेखा के रूप में प्राप्त होता है (चित्र 10.1)। इस धारा (या वोल्टता) को समदिष्ट या दिष्ट धारा (या वोल्टता) कहते हैं। इसकी आवृत्ति f शून्य होती है।



चित्र 10.1 समदिष्ट धारा

यदि कुछ विशिष्ट युक्तियों जैसे दिष्टकारी से प्राप्त धारा (या वोल्टता) का अध्ययन करें तो यह ज्ञात होता है कि धारा की दिशा समय के साथ अपरिवर्तित रहती है परन्तु धारा के मान में आवर्ती रूप से अल्प परिवर्तन होता है (चित्र 10.2)। ऐसी धारा को असमान उच्चावचन वाली दिष्ट धारा (वोल्टता) कहते हैं।



चित्र 10.2 असमान दिष्ट धारा

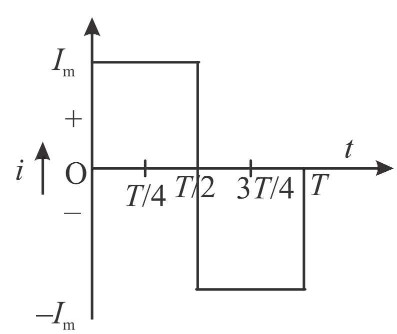
विद्युत सेल, बैटरी, दिष्ट धारा जनित्र से प्राप्त धारा (या वोल्टता), दिष्ट धारा (या वोल्टता) होती हैं।

10.2 प्रत्यावर्ती धारा (Alternating Current)

ऐसी धारा जो समय के सापेक्ष आवर्ती रूप से परिवर्तित होती हो तथा एकांतर अर्द्धचक्र में धनात्मक और ऋणात्मक होती हो, प्रत्यावर्ती धारा (वोल्टता) कहलाती है। यह ऐसे वोल्टता स्त्रोतों से उत्पन्न होती है जिनके टर्मिनलों की ध्रुवता समय के साथ आवर्ती रूप से परिवर्तित होती है। अर्थात् निम्न विभव से उच्च विभव की ओर दिशा समय के साथ आवर्ती रूप से विपरीत होती रहती है।

यह धारा तरंग प्रारूप के अनुसार कई प्रकार की हो सकती है जिनमें कुछ निम्न हैं–

10.2.1 वर्गाकार धारा (Square Wave Current)



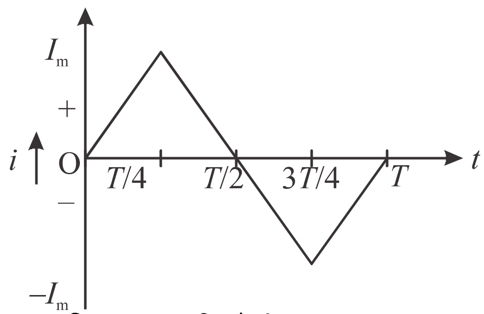
चित्र 10.3 वर्गाकार तरंग धारा

इस प्रकार की धारा में शून्य से T/2 समय तक धारा का मान I_m (अधिकतम) रहता है तथा T/2 समय पर धारा का मान तत्काल $-I_m$ होकर T समय तक बना रहता है पुनः T समय पर धारा शून्य हो जाती है। (चित्र 10.3)

अर्थात् $0 \le t \le T/2$ पर $I = I_m$

$T/2 \le t \le T$ पर $I = -I_m$

10.2.2 त्रिकोणीय तरंग धारा (Triangular Wave Current)

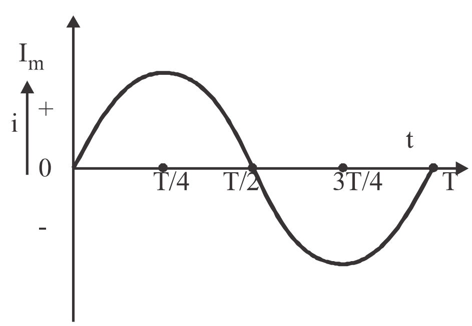


चित्र 10.4 त्रिकोणीय तरंग धारा

इसमें धारा का मान शून्य समय पर शून्य से प्रारम्भ होकर रेखिक रूप से बढ़ते हुए T/4 समय पर अधिकतम I_m और T/4 से रेखिक रूप से घटते हुए T/2 समय पर शून्य होता है। इसी प्रकार T/2 से ऋणात्मक दिशा में बढ़ते हुए 3T/4 समय पर ऋणात्मक अधिकतम $-I_m$ और अंत में T समय पर पुनः शून्य हो जाता है। (चित्र 10.4)

$t = 0$	पर	$I = 0$
$t = T/4$	पर	$I = I_m$
$t = T/2$	पर	$I = 0$
$t = 3T/4$	पर	$I = -I_m$
$t = T$	पर	$I = 0$

10.2.3 ज्यावक्रीय तरंग धारा (Sinusoidal Wave Current)



चित्र 10.5 ज्यावक्रीय तरंग धारा

यह सरलतम प्रत्यावर्ती धारा होती है। इसका मान ज्यावक्रीय रूप से परिवर्तित होता है। इस प्रकार के परिवर्तन को ज्या या कोज्या फलन के रूप में व्यक्त किया जाता है। (चित्र 10.5)

इस अध्याय में हम ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा का ही अध्ययन करेंगे। यहां यह उल्लेखनीय है कि वर्गाकार तरंग त्रिभुजाकार तरंग या सिद्धांततः कोई भी आवर्ती धारा गणितीय रूप से अनेक ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धाराओं के अध्यारापेण से बनी मानी जा सकती है जिनके आयाम एवं आवृत्तियाँ भिन्न–भिन्न होती है। इस कारण ज्यावक्रीय धारा प्रत्यावर्ती धारा का मूल रूप है।

भारत में घरेलू उपयोग के लिए प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति 50 Hz तथा अमेरिका में 60 Hz है। किसी समय t पर ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा तथा वोल्टता को निम्न समीकरणों द्वारा व्यक्त करते हैं।

$$I = I_m \sin(\omega t + \phi) \qquad \ldots (10.1)$$

$$V = V_m \sin(\omega t) \qquad \ldots (10.2)$$

यहाँ I_m और V_m क्रमशः प्रत्यावर्ती धारा और वोल्टता के अधिकतम मान हैं इन्हें शिखर मान भी कहते है।

प्रत्यावर्त्री वोल्टता के स्त्रोत का संकेत $\sim$ से व्यक्त करते है। ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा प्राप्त करने के लिए ऐसे स्त्रोत की आवश्यकता होती है जो ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती वोल्टता उत्पन्न कर सकते हो। इस प्रकार की प्रत्यावर्ती वोल्टता किसी समांगी चुंबकीय क्षेत्र में घूमती कुंडली के सिरों पर प्राप्त होती है। इसके अतिरिक्त इलेक्ट्रॉनिक दोलनी परिपथों से भी प्रत्यावर्ती वोल्टता उत्पन्न की जा सकती है।

10.3 प्रत्यावर्ती धारा और वोल्टता के तात्क्षणिक, शिखर, औसत और वर्ग माध्य मूल मान (Instentonenous, Peak, Average and Root Mean Square Values of Alternating Current and Voltage)

10.3.1 तात्क्षणिक मान (Instentonenous Value)

प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में किसी क्षण धारा (या वोल्टता) के मान को तात्क्षणिक मान कहते हैं। इसका मान शून्य, धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। समीकरण (10.1) और (10.2) क्षण t पर प्रत्यावर्ती धारा तथा वोल्टता के तात्क्षणिक मान देते हैं। ये सरल आवर्ती रूप से परिवर्तित होते हैं। यहाँ ϕ किसी क्षण t पर धारा एवं वोल्टता में कलान्तर है।

10.3.2 शिखर मान (Peak Value)

प्रत्यावर्ती परिवर्तन के पूर्ण चक्र में धारा या वोल्टता का अधिकतम मान शिखर मान कहलाता है। यह प्रत्यावर्ती परिवर्तन के आयाम को भी व्यक्त करता है। समीकरण (10.1) और (10.2) में प्रत्यावर्ती धारा और वोल्टता के शिखर मान क्रमशः I_m और V_m हैं।

10.3.3 औसत मान (Average Value)

प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में धारा तथा वोल्टता का परिमाण और दिशा दोनों समय के साथ आवर्ती रूप से परिवर्तित होते रहते हैं। प्रत्यावर्ती धारा परिपथ के वोल्टता या धारा के तात्कालिक मान के एक पूर्ण चक्र में औसत (माध्य) को औसत मान कहते हैं। एक सम्पूर्ण चक्र के लिए औसत मान

$$I_{av}\,(\text{पूर्ण चक्र के लिए}) = \frac{\int_0^T I\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{I_m}{T}\left[\int_0^T \sin\omega t\,dt\right]$$

$$= \frac{I_m}{T}\left(\frac{-\cos\omega t}{\omega}\right)_0^T = \frac{-I_m}{\omega T}(\cos\omega T - \cos 0)$$

या I_{av} (पूर्ण चक्र के लिए) $= \frac{-I_m}{\omega T}(0)$

($\because \omega T = 2\pi$ तथा $\cos 2\pi = 1$)

अतः I_{av} (पूर्ण चक्र के लिए) $= 0$

प्रथम धनात्मक अर्द्ध चक्र के लिए औसत मान

$$I_{av} = \frac{\int_0^{T/2} I_m \sin\omega t\, dt}{\int_0^{T/2} dt} = \frac{I_m}{T/2}\left(-\frac{\cos\omega t}{\omega}\right)_0^{T/2}$$

$$= -\frac{2I_m}{\omega T}\left(\cos\frac{\omega T}{2} - \cos 0\right) = \frac{2I_m}{\pi} = 0.636\, I_m$$

इसी प्रकार ऋणात्मक अर्द्धचक्र के लिए

$$I_{av} = -0.636\, I_m$$

10.3.4 वर्ग माध्य मूल मान (Root Mean Square Value)

प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में एक पूर्ण चक्र के लिए वोल्टताओं या धाराओं के वर्गों के माध्य का वर्गमूल मान वर्ग माध्य मूल मान कहलाता है। वोल्टता तथा धारा के वर्ग माध्य मूल मान को क्रमशः V_{rms} तथा I_{rms} से व्यक्त करते हैं।

$$I_{rms} = \sqrt{I_{av}^2} = \sqrt{\frac{\int_0^T I^2 dt}{\int_0^T dt}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2\omega t\, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right)dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)_0^T}$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{2T}\left(T - \frac{\sin 2\omega T}{2\omega}\right)} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T}(T-0)} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}}$$

या $$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707\, I_m \qquad \ldots (10.3)$$

इसी प्रकार $$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707\, V_m \qquad \ldots (10.4)$$

प्रत्यावर्ती परिपथों या उपकरणों में धारा तथा वोल्टता के व्यक्त किए गए मान इनके वर्ग माध्य मूल मान ही होते हैं। प्रत्यावर्ती धारा या वोल्टता के वर्ग माध्य मूल मान को आभासी मान या प्रभावी मान भी कहते हैं।

आभासी या प्रभावी मान से तात्पर्य है कि प्रत्यावर्ती वोल्टता या धारा ऊष्मीय प्रभाव में आभासी रूप से V_{rms} या I_{rms} के बराबर दिष्ट वोल्टता या धारा के तुल्य होती है प्रत्यावर्ती धारा द्वारा पूर्ण चक्र में उत्पन्न ऊष्मा की माध्य दर

$$H_{av} = \frac{\int_0^T I^2 R\, dt}{\int_0^T dt} = I_{rms}^2 \times R$$

दिष्ट धारा द्वारा उत्पन्न ऊष्मा की दर $= I_{dc}^2 R$

अतः दोनों दरें बराबर होने पर $I_{dc} = I_{rms}$

अतः $$I_{\text{प्रभावी}} = I_{\text{आभासी}} = I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad \ldots (10.5)$$

दिष्ट धारा अमीटर या वोल्टमीटर जो धारा के चुम्बकीय प्रभाव पर आधारित हैं, के माध्यम से प्रत्यावर्ती धारा या वोल्टता को मापना चाहें तो पाठ्यांक शून्य होगा क्योंकि सुई पर बल आघूर्ण आवर्त रूप से दोनों दिशाओं में इतना शीघ्रता से परिवर्तित होगा कि जड़त्व के कारण सुई माध्य स्थिति में ही बनी रहेगी।

प्रत्यावर्ती धारा को मापने के लिए तप्त तार अमीटर की सहायता ली जाती है जो धारा के ऊष्मीय प्रभाव पर आधारित होते हैं। किसी तार में उत्पन्न ऊष्मा I_{rms}^2 या V_{rms}^2 पर निर्भर करती है अतः तप्त तार मीटरों की स्केल रेखिक नहीं होती बल्कि मान बढ़ने के साथ अंशो के मध्य की दूरी बढ़ती जाती है। अर्थात् तप्त तन्तु मीटर के पैमाने पर 1, 2, 3, . . . मान की धाराओं के लिए चिन्ह 1 : 4 : 9 : 16 . . . आदि सापेक्ष दूरियों पर होते है।

भारत में घरेलू उपयोग हेतु आपूर्तित की जाने वाली प्रत्यावर्ती वोल्टता का वर्ग माध्य मूल मान $V_{rms} = 220\text{V}$ होता है। अतः इसका शिखर मान

$$V_m = \sqrt{2}\, V_{rms} = \sqrt{2} \times 220 = 311\text{V}$$

होता है।

10.3.5 प्रत्यावर्ती धारा की विशेषताएँ (Properties of ac)

गुण

(i) प्रत्यावर्ती वोल्टता को ट्रांसफार्मर द्वारा परिवर्तित किया जा सकता है जिससे उच्च वोल्टता एवं निम्न धारा पर बहुत कम शक्ति ह्रास से विद्युत संचरण किया जाता है।

(ii) प्रत्यावर्ती धारा को दिष्टकारी की सहायता से आसानी से दिष्ट धारा में परिवर्तित किया जा सकता है।

(iii) प्रत्यावर्ती धारा जनित्र एवं मोटर अधिक दृढ़ एवं प्रचालन में अधिक सुविधाजनक होते हैं तथा इनकी लागत दिष्ट धारा जनित्र मोटर से कम होती है।

दोष

(i) किसी मान की प्रत्यावर्ती वोल्टता उसी मान की दिष्ट वोल्टता की तुलना में अधिक खतरनाक होती है क्योंकि प्रत्यावर्ती वोल्टता का शिखर मान इसके rms मान का $\sqrt{2}$ गुना होता है।

(ii) त्वचिक प्रभाव – उच्च आवृति की प्रत्यावर्ती धारा किसी तार के सम्पूर्ण अनुप्रस्थ परिच्छेद से समान रूप से वितरित होते हुए प्रवाहित नहीं होती बल्कि तार के पृष्ठ की परतों में से प्रवाहित होती है। अतः जहाँ मोटे तार की आवश्यकता हो वहाँ अनेक पतले तारो को मिला दिया जाता है।

(iii) प्रत्यावर्ती धारा का सीधा उपयोग विद्युत अपघटन इलेक्ट्रो प्लेटिंग में नहीं किया जा सकता है। इसे विद्युत चुंबक बनाने में भी काम नहीं लिया जा सकता।

उदाहरण 10.1 प्रत्यावर्ती धारा $I = I_1 \cos\omega t + I_2 \sin\omega t$ के लिए वर्ग माध्य मूल धारा का मान ज्ञात करो।

हल: $I = I_1 \cos\omega t + I_2 \sin\omega t$

अतः $I^2 = I_1^2 \cos^2 \omega t + I_2^2 \sin^2 \omega t + 2I_1 I_2 \sin\omega t \cos\omega t$

एक पूर्ण चक्र में औसत मान

$$\overline{I^2} = \frac{\int_0^T I^2 dt}{\int_0^T dt} = \frac{\int_0^T (I_1^2 \cos^2 \omega t + I_2^2 \sin^2 \omega t) + 2I_1 I_2 \sin\omega t \cos\omega t}{\int_0^T dt} dt$$

$$\overline{I^2} = I_1^2 \times \frac{1}{2} + I_2^2 \times \frac{1}{2} + 0$$

$\because$ $\sin^2 \omega t$ और $\cos^2 \omega t$ का एक पूर्ण चक्र में औसत मान 1/2 होता है तथा $\sin 2\omega t$ का पूर्ण चक्र में औसत मान शून्य होता है।

$$\therefore \quad I_{rms} = \sqrt{\overline{I^2}} = \sqrt{\frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(I_1^2 + I_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

उदाहरण 10.2 किसी 50Hz आवृत्ति के ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती वोल्टता का वर्ग माध्य मूल मान $200\sqrt{2}$ V है। तो इसकी तात्क्षणिक वोल्टता का समीकरण (t समय पर) लिखो।

हल: $V = V_m \sin\omega t$

दिया है $V_{rms} = 200\sqrt{2}$ V, $f = 50 Hz$

अतः $V_m = \sqrt{2}\, V_{rms} = \sqrt{2} \times 200\sqrt{2} = 400$ V

$\omega = 2\pi f = 2 \times 3.14 \times 50 = 314$ rad/s

अतः तात्क्षणिक वोल्टता $V = 400 \sin 314\, t$ V

उदाहरण 10.3 प्रत्यावर्ती वोल्टता का मान $V = 400 \sin 100\pi t$ है तो इस वोल्टता की आवृत्ति ज्ञात करो।

हल: प्रत्यावर्ती वोल्टता का सामान्य सूत्र

$$V = V_m \sin\omega t = V_m \sin 2\pi f t$$

तथा दी गई वोल्टता

$$V = 400 \sin 100\pi t$$

दोनों समीकरणों की तुलना करने पर

$2f = 100$

अतः $f = 50$ Hz

उदाहरण 10.4 किसी प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में धारा का शिखर मान 5 A है। यदि परिपथ में (i) प्रत्यावर्ती धारा अमीटर (ii) दिष्ट धारा अमीटर जोड़े तो उनके पाठ्यांक क्या होंगे?

हल: (i) प्रत्यावर्ती धारा अमीटर धारा के वर्ग माध्य मूल मान को मापता है अतः

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 2.5 \times \sqrt{2} = 3.535 \text{ A}$$

(ii) दिष्ट धारा अमीटर धारा के औसत मान को मापता है चूंकि प्रत्यावर्ती धारा का औसत मान शून्य होता है। अतः दिष्ट धारा अमीटर में

$I = 0$

उदाहरण 10.5 किसी परिपथ में वोल्टता का वर्ग माध्य मूल 220 वोल्ट है तो वोल्टता का शिखर मान ज्ञात करो।

हल: $V_{rms} = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}}$

अतः $V_m = \sqrt{2} \times V_{rms}$

दिया है $V_{rms} = 220$ V

$V_m = 220 \times \sqrt{2} = 311.08$ V

उदाहरण 10.6 प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में धारा का मान निम्न है $I = 3 \sin 2\pi t$ A ज्ञात करे

(i) धारा का वर्ग माध्य मूल मान–

(ii) $t = \frac{1}{2} s$ पर धारा का तात्क्षणिक मान

हल: (i) $I_{rms} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

दिया है $I_m = 3$ A, $t = \frac{1}{2} s$

$$I_{rms} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2.12\,\text{A}$$

(ii) $$I = 3\sin 2\pi \times \frac{1}{2} = 3\sin \pi = 0$$

उदाहरण 10.7 50 Hz आवृत्ति वाली प्रत्यावर्ती धारा को शून्य से अधिकतम मान तक पहुँचने में लगा समय ज्ञात करो।

हलः धारा को शून्य से अधिकतम मान तक पहुँचने में लगा समय

$$t = \frac{T}{4}$$

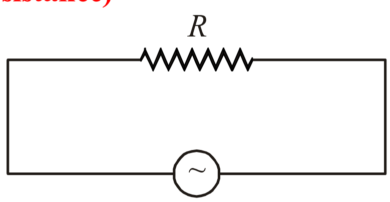
अतः $$t = \frac{1}{4f}$$

दिया है $f = 50$ Hz

$$t = \frac{1}{4\times 50} = 0.005\,s$$

10.4 विभिन्न प्रकार के प्रत्यावर्ती धारा परिपथों में प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा प्रत्यावर्ती धारा के मध्य कला संबंध तथा फेजर आरेख (Phase Relation Between Alternating Voltage and Alternating Current in Different Types of ac Circuits and Phasor Diagram)

10.4.1 शुद्ध प्रतिरोधीय परिपथ (Circuit Contains Pure Ohmic Resistance)



$V = V_m \sin \omega t$

चित्र 10.6 प्रतिरोध पर प्रयुक्त ac वोल्टता

चित्र 10.6 में प्रदर्शित एक विद्युत परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता स्त्रोत $V = V_m \sin \omega t$ से प्रतिरोध R जुड़ा है। प्रतिरोध में प्रवाहित धारा का मान ज्ञात करने के लिए किरचॉफ के लूप नियम से

$$\sum V(t) = 0$$

यदि परिपथ में t समय पर प्रवाहित धारा I तथा प्रतिरोध के सिरों पर विभवांतर V_R है तो

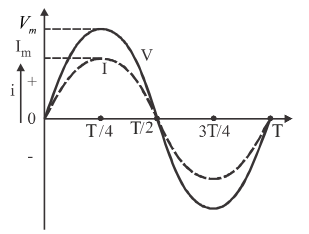
$$V = V_R$$

या $$V_m \sin \omega t = IR$$

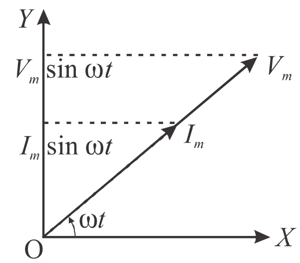
अतः $$I = \frac{V_m}{R}\sin \omega t = I_m \sin \omega t \qquad \ldots (10.6)$$

यहाँ $I_m = \frac{V_m}{R}$ प्रत्यावर्ती धारा का शिखर मान है।

समीकरण (10.6) से स्पष्ट है कि इस परिपथ में ज्यावक्रीय वोल्टता लगाने पर प्रवाहित धारा भी ज्यावक्रीय होती है तथा प्रत्यावर्ती धारा और वोल्टता समान कला में होते है। अर्थात् V और I दोनों ही शून्य, अधिकतम तथा न्यूनतम मानों की स्थितियाँ साथ–साथ ही प्राप्त करते हैं।



चित्र 10.7 शुद्ध प्रतिरोध में प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा धारा की ज्यावक्रीय प्रकृति तथा कला संबंध

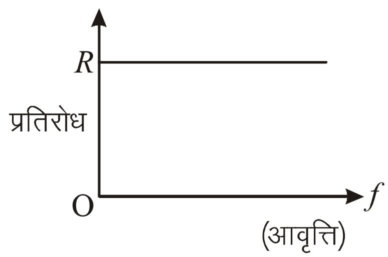


चित्र 10.8 शुद्ध प्रतिरोध परिपथ में फेजर आरेख

प्रत्यावर्ती वोल्टता एवं धारा की ज्यावक्रीय प्रकृति को चित्र 10.7 में प्रदर्शित किया गया है। जैसा कि पूर्व में उल्लेखित किया जा चुका है प्रत्यावर्ती परिपथों के लिए यह आवश्यक नहीं है कि परिपथ में आरोपित प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा परिपथीय प्रत्यावर्ती धारा समान कला में ही है। ऐसे परिपथों के विश्लेषण में फेजर्स की धारणा का उपयोग करने पर परिपथ का विश्लेषण सरलता पूर्वक किया जा सकता है। प्रत्यावर्ती वोल्टता (या धारा) के निरूपण के लिए एक घूर्णी सदिश की कल्पना की जाती है जिसकी लम्बाई (परिमाण) वोल्टता (या धारा) के शिखर मान के बराबर तथा आवृति प्रत्यावर्ती वोल्टता (या धारा) की आवृति के बराबर होती है इस प्रकार का घूर्णी सदिश फेजर कहलाता है तथा संबंधित आरेख फेजर आरेख कहलाते है। इस प्रकार के घूर्णी सदिश की पूंछ बिन्दु O पर नियत रहती है तथा सिरा वृत्ताकार पथ पर नियत कोणीय आवृति ω से गति करता है। यदि समय $t = 0$ पर सदिश X अक्ष के संपाती है तब समय t पर यह X अक्ष से $\theta = \omega t$ कोण पर होगा।किसीक्षण t पर सदिश का Y घटक उस क्षण प्रत्यावर्ती वोल्टता (या धारा) का तात्क्षणिक मान देगा। चित्र 10.8 में शुद्ध प्रतिरोधीय परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा धारा के शिखर मानों को फेजरों के रूप में X-Y तल में t समय पर X-अक्ष से ωt कोण बनाते हुए दर्शाया गया है। ये दोनों फेजर वामावर्त दिशा में ω कोणीय वेग से घूर्णन करते हैं। फेजर्स के ऊर्ध्वाधर घटक किसी क्षण पर धारा या वोल्टता का तात्क्षणिक मान प्रदर्शित करते हैं। इसके लिए V_m और I_m का Y-अक्ष पर प्रक्षेप लिया जाता है। फेजर आरेख (चित्र 10.8) से ज्ञात होता है कि प्रतिरोध के लिए फेजर्स V और

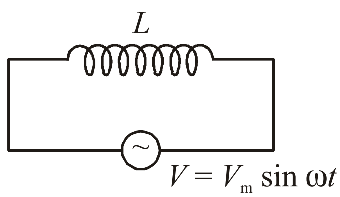
I एक ही दिशा में हैं अतः वोल्टता तथा धारा के मध्य कलांतर शून्य है। परन्तु जैसा आगे वर्णित किया जाएगा प्रेरकत्व या संधारित्र युक्त परिपथों में फेजर V तथा I अलग दिशाओं में होंगें।

शुद्ध प्रतिरोध किसी प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में R ओम का अवरोध उत्पन्न करता है अतः अवरोध का मान प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति पर निर्भर नहीं करता। (चित्र 10.9)



चित्र 10.9 प्रतिरोध की आवृत्ति पर निर्भरता

10.4.2 शुद्ध प्रेरकीय परिपथ (Circuit Contains Pure Inductor Circuit)



चित्र 10.10 प्रेरक के साथ जुड़ा प्रत्यावर्ती वोल्टता

चित्र (10.10) में प्रदर्शित विद्युत परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता स्त्रोत $V = V_m \sin \omega t$ से एक कुण्डली जुड़ी है जिसका स्वप्रेरकत्व L है। यदि समय t पर प्रवाहित धारा I तथा कुंडली के सिरों पर वोल्टता V_L है तो किरचॉफ के लूप नियम से

$$V - V_L = 0$$

यहाँ प्रेरक का प्रतिरोध नगण्य है। चूँकि वोल्टता का मान समय के साथ परिवर्ती है अतः फैराडे के नियम से कुण्डली में प्रेरित वोल्टता $\left(-L\dfrac{dI}{dt}\right)$ उत्पन्न होगी।

अतः $$V_m \sin \omega t = \frac{LdI}{dt}$$

या $$dI = \frac{V_m}{L}\sin \omega t \, dt \qquad \ldots (10.7)$$

धारा का मान ज्ञात करने हेतु उपर्युक्त समीकरण का समाकलन करने पर

$$\int dI = \int \frac{V_m}{L}\sin \omega t \, dt$$

या $$I = \frac{V_m}{L}\left(-\frac{\cos \omega t}{\omega}\right)$$

या $$I = \frac{V_m}{L\omega}(-\cos \omega t)$$

$\because$ $$-\cos \omega t = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

अतः $$I = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \ldots (10.8)$$

यहाँ I_m धारा का शिखर मान है।

$$I_m = \frac{V_m}{L\omega} \qquad \ldots (10.9)$$

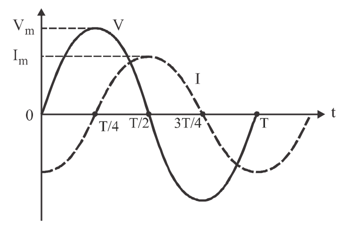
राशि $L\omega$ की विमा प्रतिरोध के समान है, इसे प्रेरकीय प्रतिघात कहते हैं तथा इसे X_L द्वारा व्यक्त करते हैं।

$$X_L = L\omega \qquad \ldots (10.10)$$

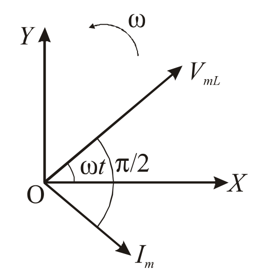
अतः $$I_m = \frac{V_m}{X_L} \qquad \ldots (10.11)$$

प्रेरकीय प्रतिघात का मात्रक ओम है। प्रेरकीय प्रतिघात शुद्ध प्रेरणिक परिपथ में धारा को वैसे ही नियंत्रित करता है जिस प्रकार प्रतिरोध शुद्ध प्रतिरोध परिपथ में।

समीकरण 10.8 से स्पष्ट है कि शुद्ध प्रेरकत्व वाले प्रत्यावर्ती परिपथ में प्रवाहित धारा भी समान आवृत्ति की ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा होती है तथा इसकी कला आरोपित वोल्टता की कला से $\pi/2$ पीछे होती है। अर्थात् धारा वोल्टता की अपेक्षा $T/4$ समय के पश्चात् अपने अधिकतम मान को प्राप्त करती है। (चित्र 10.11)



चित्र 10.11 V और I का ωt के मध्य ग्राफ



चित्र 10.12 शुद्ध प्रेरक परिपथ में फेजर आरेख

समीकरण (10.10) से

$$X_L = L\omega$$

$$X_L = L \times 2\pi f \qquad \ldots (10.12)$$

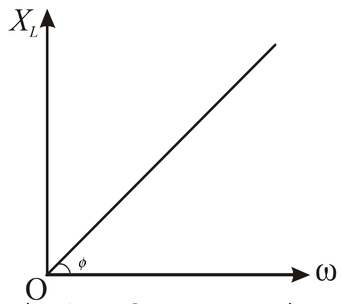
चित्र 10.13 में कुंडली के प्रेरकीय प्रतिघात X_L तथा ω के मध्य ग्राफ प्रदर्शित किया है। इस वक्र का ढाल $\tan\phi$ कुण्डली के स्वप्रेरकत्व को निरूपित करता है।

जब प्रेरक में दिष्ट धारा प्रवाहित की जाती है तो प्रेरकीय प्रतिघात शून्य होता है (क्योंकि $f = 0$) अतः प्रेरक दिष्टधारा के लिए लघुपथन प्रदान करता है परन्तु प्रत्यावर्ती धारा के

लिए f का परिमित मान होने से प्रेरकीय प्रतिघात का सीमित मान होगा। अतः प्रेरक प्रत्यावर्ती धारा के प्रवाह का विरोध करता है।

प्रत्यावर्ती वोल्टता $V = V_m \sin \omega t$

शुद्ध प्रेरकत्व में $I = I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$



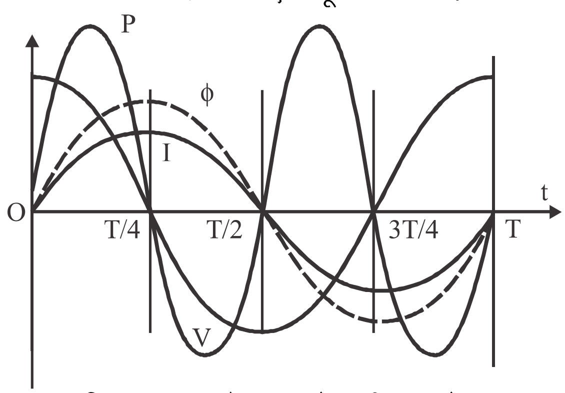
चित्र 10.13 प्रेरकीय प्रतिघात का ω के साथ परिवर्तन

अतः वोल्टता, धारा से $\pi/2$ या $90°$ आगे है।

चुम्बकीय फ्लक्स $\phi = LI$ अर्थात् $\phi \propto I$

परिपथ में शक्ति $P = VI$

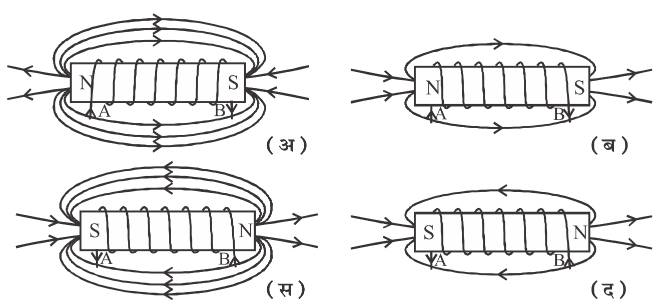
उपर्युक्त चारों राशियों वोल्टता, धारा, फ्लक्स तथा शक्ति को निम्न लेखाचित्र 10.14 में एक पूर्ण चक्र में दर्शाया गया है।



चित्र 10.14 प्रेरकत्व में शक्ति आरेख

प्रेरकत्व में चारों स्थितियाँ चित्र द्वारा प्रदर्शित की गई हैं। जिसमें चुम्बकीय क्षेत्र रेखाओं की संख्या फ्लक्स को व्यक्त करती हैं।

चित्र 10.15 प्रेरकत्व में धारा, फ्लक्स, वोल्टता का एक पूर्ण चक्र में परिवर्तन



चित्र 10.15 प्रेरकत्व में धारा फ्लक्स, वोल्टता का एक पूर्ण चक्र में परिवर्तन (अ) शून्य से $T/4$; (ब) $T/4$ से $T/2$ तक (स) $T/2$ से $3T/4$ तक (द) $3T/4$ से T तक

एक प्रेरकीय परिपथ में शक्ति एवं फ्लक्स में परिवर्तन को समझने के लिए चित्र 10.15 में दर्शाये अनुसार एक प्रेरकत्व में एक पूर्णचक्र में धारा परिवर्तन को उससे सम्बद्ध फ्लक्स पर विचार करते हैं।

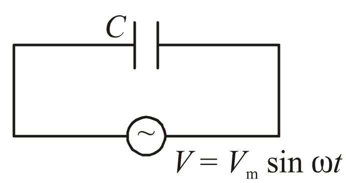
चित्र (अ) में कुंडली में प्रवाहित धारा I, बिन्दु A पर प्रवेश करती है तथा शून्य से अधिकतम मान तक बढ़ती है। जिससे चुम्बकीय फ्लक्स भी बढ़ता है अर्थात् क्रोड़ चुम्बकित होता है। वोल्टता और धारा दोनों धनात्मक होने से इनका गुणनफल शक्ति P भी धनात्मक होती है अर्थात् ऊर्जा अवशोषित होती है।

चित्र (ब) में $T/4$ से $T/2$ समय तक धारा कम हो रही है और $T/2$ समय पर क्रोड विचुम्बकित हो जाता है तथा कुल फ्लक्स शून्य हो जाता है। वोल्टता ऋणात्मक तथा धारा धनात्मक होने से इनका गुणनफल शक्ति ऋणात्मक है अर्थात् ऊर्जा स्त्रोत को लौटाई जाती है।

चित्र (स) में $T/2$ से $3T/4$ समय तक धारा ऋणात्मक दिशा (विपरीत) में बढ़ रही है तो चुम्बकीय फ्लक्स भी विपरीत दिशा में बढ़ेगा। धारा और वोल्टता दोनों ऋणात्मक होने से इनका गुणनफल शक्ति P धनात्मक होगी। अर्थात् ऊर्जा अवशोषित होती है।

चित्र (द) में $3T/4$ से T समय तक धारा कम हो रही है और T समय पर शून्य हो जाती है तथा क्रोड विचुम्बकित हो जाता है अर्थात् फ्लक्स शून्य है। वोल्टता धनात्मक और धारा ऋणात्मक होने से इनका गुणनफल शक्ति ऋणात्मक है अर्थात् ऊर्जा स्त्रोत को लौटाई जाती है। इसलिए एक पूर्ण चक्र में किसी प्रेरक को दी गई औसत शक्ति का मान शून्य है। इसे हम अनुच्छेद 10.7 में सत्यापित भी करेंगे।

10.4.3 शुद्ध धारितीय परिपथ (Circuit Contains Pure Capacitance Circuit)



चित्र 10.16 संधारित्र (धारिता) के साथ जुड़ा प्रत्यावर्ती वोल्टता स्त्रोत

चित्र 10.16 में प्रदर्शित विद्युत परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता स्त्रोत $V = V_m \sin \omega t$ से एक संधारित्र जुड़ा है, जिसकी धारिता C है। किसी समय t पर प्रवाहित धारा I तथा संधारित्र के सिरों पर वोल्टता V_C है तो किरचॉफ के लूप नियम से

$$V - V_C = 0$$

यदि समय t पर संधारित्र पर आवेश q है तो संधारित्र के सिरों के मध्य तात्क्षणिक वोल्टता

$$V_C = \frac{q}{C}$$

अतः $\quad \frac{q}{C} = V_m \sin \omega t$

या $\quad q = V_m C \sin \omega t$

अतः धारा $I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(V_m C \sin \omega t)$

या $\quad I = V_m C \omega \cos \omega t$

$\because \quad \cos \omega t = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

अतः $\quad I = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \ldots (10.13)$

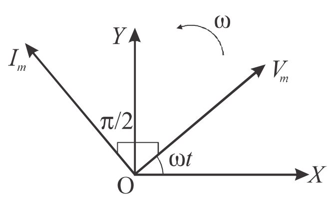
यहाँ $\quad I_m = V_m C \omega$ धारा का शिखर मान है।

या $\quad I_m = \frac{V_m}{1/C\omega} \qquad \ldots (10.14)$

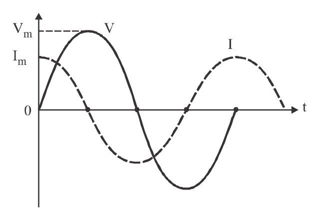
स्पष्टतः राशि $1/C\omega$ की विमा प्रतिरोध की विमा के समान है यह शुद्ध धारिता के परिपथ द्वारा धारा में उत्पन्न अवरोध का मापक है इसे धारितीय प्रतिघात कहते हैं। इसे X_C से निरूपित करते हैं

$$X_C = \frac{1}{C\omega}$$

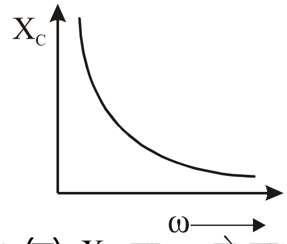
समीकरण (10.13) से स्पष्ट है कि शुद्ध धारितीय परिपथ में ज्यावक्रीय वोल्टता आरोपित करने पर परिपथ में समान आवृत्ति की ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा प्रवाहित होती है लेकिन इसकी कला वोल्टता की कला से $\pi/2$ आगे होती है। (चित्र 10.17अ)। चित्र (10.17) व से ज्ञात होता है कि धारा, वोल्टता की तुलना में $T/4$ समय पहले अधिकतम मान ग्रहण करती है।



चित्र 10.17(अ) शुद्ध संधारित्र



चित्र 10.17(ब) वोल्टता एवं धारा का ωt के सापेक्ष ग्राफ



चित्र 10.17(स) X_C का ω के साथ परिवर्तन

समीकरण (10.15) से $X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C \times 2\pi f}$ चित्र (10.17) में X_C और प्रत्यावर्ती वोल्टता स्त्रोत की आवृत्ति f में ग्राफ प्रदर्शित है। एक संधारित्र दिष्ट धारा के लिए अनन्त अवरोध प्रदान करता है लेकिन प्रत्यावर्ती धारा के लिए उपपथ प्रदान करता है। दिष्ट धारा के लिए $\omega = 0$ होने से $X_C = \infty$ जबकि प्रत्यावर्ती धारा के लिए ω का कुछ मान होने से $X_C = \frac{1}{C\omega}$ का कुछ मान होगा।

वोल्टता $\quad V = V_m \sin \omega t$

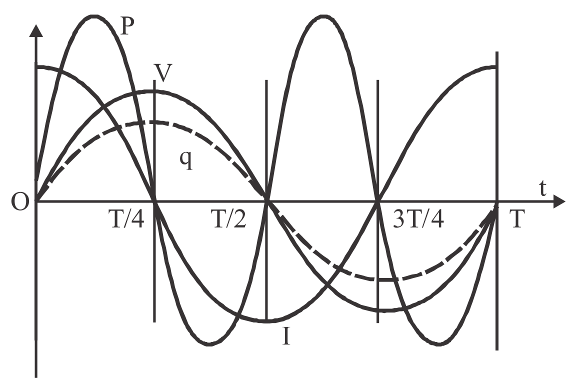
संधारित्र में $\quad I = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

अतः वोल्टता, धारा से $\pi/2$ या 90^o पीछे है।

आवेश $\quad q = CV$

परिपथ में शक्ति $\quad P = VI$

उपर्युक्त चारों राशियों वोल्टता, धारा, आवेश और शक्ति को निम्न लेखाचित्र में एक पूर्ण चक्र में दर्शाया गया है।

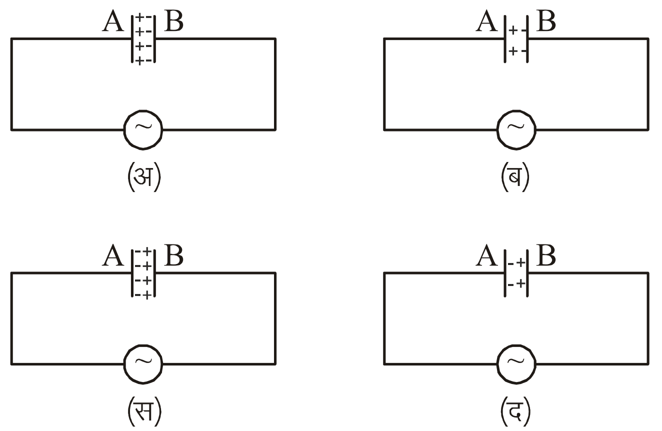


चित्र 10.18 संधारित्र में शक्ति आरेख

संधारित्र में उक्त चारों स्थितियाँ निम्न चित्र 10.19 द्वारा प्रदर्शित की गई है।

चित्र 10.19 (अ) में धारा का मान शून्य से अधिकतम मान तक बढ़ता है जिससे प्लेट A पर धनावेश और B पर ऋणावेश का मान बढ़ता जाता है जो $T/4$ समय पर अधिकतम हो जाता है। वोल्टता $V = q/C$ आवेश q के साथ समान कला में होती है। धारा और वोल्टता दोनों धनात्मक होने से शक्ति धनात्मक होती है अर्थात् संधारित्र स्त्रोत से ऊर्जा अवशोषित करता है।

चित्र (ब) में $T/2$ समय तक धारा विपरीत दिशा में प्रवाहित हो रही है तथा संग्रहित आवेश समाप्त हो रहा है वोल्टता कम होती जाती है। $T/2$ समय पर संधारित्र विसर्जित हो जाता है।



चित्र 10.19 संधारित्र में धारा, वोल्टता, आवेश का एक पूर्ण चक्र में परिवर्तन (अ) 0 से $T/4$ तक ; (ब) $T/4$ से $T/2$ तक (स) $T/2$ से $3T/4$ तक (द) $3T/4$ से T तक

धारा ऋणात्मक और वोल्टता धनात्मक होने से शक्ति ऋणात्मक होती है अर्थात् ऊर्जा स्त्रोत को वापस लौटा दी जाती है।

चित्र (स) में धारा विपरीत दिशा में ही प्रवाहित हो रही है और कम हो रही है तथा वोल्टता की दिशा विपरीत होने से संधारित्र विपरीत ध्रुवता के साथ आवेशित होता है। प्लेट A ऋणावेशित तथा B धनावेशित धारा और वोल्टता दोनों ऋणात्मक होने से शक्ति धनात्मक है अतः संधारित्र ऊर्जा अवशोषित करता है।

चित्र (द) में $3T/4$ से T समय तक वोल्टता विपरीत दिशा में घटने से संग्रहित आवेश कम होता जाता है और T समय पर संधारित्र निरावेशित हो जाता है। धारा धनात्मक और वोल्टता ऋणात्मक होने से शक्ति ऋणात्मक है अर्थात् ऊर्जा स्त्रोत को लौटा दी जाती है।

इस प्रकार एक पूर्ण चक्र में संधारित्र द्वारा अवशोषित कुल औसत ऊर्जा शून्य होती है। इसका हम अनुच्छेद 10.7 में और अध्ययन करेंगे।

उदाहरण 10.8 एक प्रतिरोधहीन कुण्डली का प्रेरकत्व $5/\pi$ mH हैं, इसे 50 Hz आवृत्ति की प्रत्यावर्ती धारा से जोड़ा गया है तो प्रेरकीय प्रतिघात ज्ञात करो। यदि परिपथ में प्रवाहित धारा 0.5 A हो तो कुण्डली के सिरों पर उत्पन्न विभवांतर भी ज्ञात करो।

हलः प्रेरकीय प्रतिघात $X_L = L\omega$

या $\quad X_L = L \times 2\pi f$

दिया है $\quad f = 50\,\text{Hz}, L = 5/\pi\,\text{mH}$, $I = 0.5$ A

$$X_L = \frac{5}{\pi} \times 2\pi \times 50 \times 10^{-3} = 0.5\,\Omega$$

कुंडली के सिरों पर उत्पन्न विभवांतर

$$V_L = I \times L = 0.5 \times 0.5 = 0.25\,\text{V}$$

उदाहरण 10.9 एक संधारित्र की धारिता 50 pF है। उसका 5 kHz आवृत्ति पर धारितीय प्रतिघात ज्ञात करो।

हलः धारितीय प्रतिघात $X_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{C \times 2\pi f}$

दिया है $C = 50$ pF $= 50 \times 10^{-12}$ f, $f = 5 \times 10^3$ Hz

$$X_C = \frac{1}{50 \times 10^{-12} \times 2 \times 3.14 \times 5 \times 10^3}$$

$$= 6.37 \times 10^4\,\Omega$$

उदाहरण 10.10 1 μF धारिता का संधारित्र निम्न प्रत्यावर्ती वोल्टता स्त्रोत से जुड़ा है

$$V = 200\sqrt{2}\sin 100t\,\text{V}$$

परिपथ में प्रवाहित धारा का मान ज्ञात करो।

हलः $\quad V_{rms} = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}}$

दिया है $V_m = 200\sqrt{2}$ V, $\omega = 100$ rad/s

$C = 100^{-6}$ F

$$V_{rms} = \frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 200\,\text{V}$$

$$X_C = \frac{1}{c\omega} = \frac{1}{100 \times 10^{-6}} = 10^4\,\Omega$$

अतः $\quad I_{rms} = \dfrac{V_{rms}}{X_C} = \dfrac{200}{10^4} = 0.02\,\text{A}$

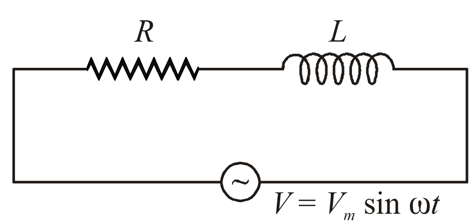
उदाहरण 10.11 50 Hz आवृत्ति वाले प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में एक कुण्डली लगाई जाती है। 100 Ω का प्रतिघात उत्पन्न करने के लिए कुण्डली की प्रेरकत्व ज्ञात करो।

हलः प्रेरकीय प्रतिघात $X_L = L \times 2\pi f$

दिया है $X_L = 100\Omega, f = 50\,Hz$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{100}{2 \times 3.14 \times 50} = 0.318\,\text{H}$$

10.4.4 L-R परिपथ (L-R Circuit)



चित्र 10.20 श्रेणीक्रम में R–L के साथ जुड़ा प्रत्यावर्ती वोल्टता स्रोत

चित्र 10.20 में प्रदर्शित विद्युत परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता स्त्रोत $V = V_m \sin \omega t$ से श्रेणीक्रम में प्रेरकत्व L और प्रतिरोध R जुड़े है। किसी समय t पर परिपथ में प्रवाहित धारा I तथा प्रतिरोध और प्रेरकत्व पर विभवांतर क्रमशः V_R और V_L है। यदि प्रतिरोध एवं प्रेरकत्व पर परिणामी वोल्टता V_{R-L} है तो किरचॉफ के लूप नियम से

$$V - V_{RL} = 0$$

चित्र 10.21(अ) में प्रदर्शित फेजर आरेख की सहायता से इस परिपथ में प्रभावी प्रतिरोध तथा वोल्टता एवं धारा के मध्य कलांतर ज्ञात करते हैं। वोल्टता V_{mR} तथा धारा I_m समान कला में होंगे लेकिन वोल्टता V_{mL} धारा I_m से $\pi/2$ कोण से आगे होगी इस प्रकार V_{mR} तथा V_{mL} के मध्य कलांतर $\pi/2$ या 90^o होगा अतः सदिश आरेख में ये परस्पर लम्बवत् होगें।

अतः परिणामी वोल्टता

$$V_{mRL} = \sqrt{V_{mR}^2 + V_{mL}^2}$$

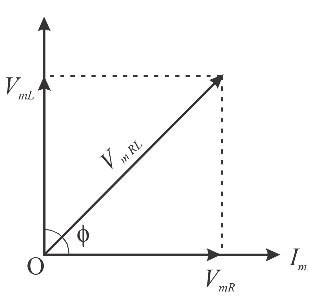
$\because$ $$V_{mR} = I_{mR} R \text{ तथा } V_{mL} = I_m X_L$$

अतः $$V_{mRL} = \sqrt{I_m^2 R^2 + I_m^2 X_L^2}$$

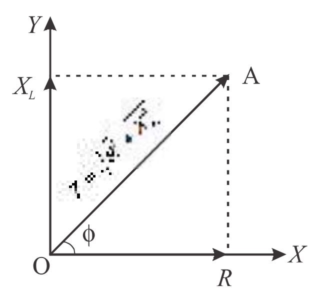
या $$I_m = \frac{V_{mRL}}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad \ldots (10.16)$$

यहाँ $\sqrt{R^2 + X_L^2}$, प्रत्यावर्ती धारा के लिए परिपथ R–L का प्रभावी अवरोध है जिसे परिपथ की प्रतिबाधा कहते हैं। इसे Z द्वारा व्यक्त करते हैं।

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad \ldots (10.17)$$



चित्र 10.21(अ) सदिश आरेख श्रेणी $R–L$ परिपथ



चित्र 10.21(ब) प्रतिबाधा आरेख (श्रेणी $R–L$ परिपथ)

चित्र 10.21(अ) से स्पष्ट है कि श्रेणी $R–L$ परिपथ में ज्यावक्रीय वोल्टता V लगाने पर वोल्टता प्राप्त ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा I से ϕ कोण आगे है।

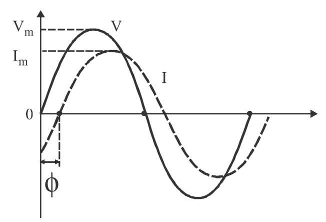
अतः $$I = I_m \sin(\omega t - \phi) \quad \ldots (10.18)$$

चित्र 10.21(ब) से $R–L$ श्रेणी परिपथ की प्रतिबाधा ज्ञात करते है। प्रतिरोध R को X-अक्ष की दिशा में तथा प्रेरकीय प्रतिघात X_L को Y-अक्ष की ओर लेने पर प्रतिबाधा Z को OP से प्रदर्शित करते है जो X-अक्ष से ϕ कोण बनाता है।

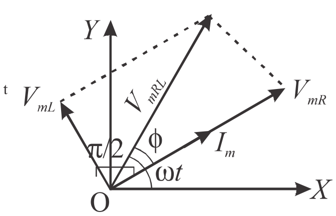
चित्र 10.21(स) से $$\tan\phi = \frac{V_{mL}}{V_{mR}} = \frac{I_m X_L}{I_m R} = \frac{X_L}{R}$$

अतः कलांतर $$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right) \quad \ldots (10.19)$$

RL परिपथ में ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा में ωt के साथ परिवर्तन आरेख खींचने पर चित्र 10.22(अ) के समान प्राप्त होता है जहाँ धारा वोल्टता से ϕ कोण पीछे है तथा चित्र 10.22(ब) प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा धारा के फेजर आरेख को प्रदर्शित करता है।



चित्र 10.22(अ) श्रेणी RL परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता



चित्र 10.22(ब) श्रेणी RL परिपथ में फेजर आरेख

उदाहरण 10.12 0.5 H प्रेरकत्व की कुण्डली को जब 100 V के दिष्ट धारा स्त्रोत से जोड़ते हैं तो कुण्डली में 0.5 A धारा प्रवाहित होती है। यदि इसी कुण्डली को 50 Hz तथा 100 V के प्रत्यावर्ती धारा स्त्रोत से जोड़ा जाए तो इसमें प्रवाहित धारा का मान ज्ञात करो।

हल: कुण्डली को दिष्ट धारा स्त्रोत से जोड़ने पर $X_L = 0$ अतः केवल ओमीय प्रतिरोध प्रभावी होगा

अतः $$R = \frac{V}{I}$$

दिया है $L = 0.5$ H, $V = 100$ V

प्रत्यावर्ती स्त्रोत के लिए $f = 50$ Hz, V = 100 V

कुण्डली का ओमीय प्रतिरोध $$R = \frac{100}{0.5} = 200\,\Omega$$

प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में $$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$\omega = 2\pi f = 2 \times 3.14 \times 50 = 314 \text{ rad/s}$$

अतः $$Z = \sqrt{(200)^2 + (0.5 \times 314)^2} = 254.26\,\Omega$$

अतः धारा $$I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{254.26} = 0.39\text{ A}$$

उदाहरण 10.13 एक विद्युत बल्ब 100 V और 10 A पर कार्य करता है, उसे 200 V तथा 50 Hz आवृत्ति वाले प्रत्यावर्ती स्त्रोत से जोड़ा गया है। आवश्यक कुण्डली (चोक) का प्रेरकत्व ज्ञात करो।

हलः प्रतिबाधा $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$

दिया है बल्ब के लिए $V = 100$ V, $I = 10$ A

प्रत्यावर्ती स्त्रोत हेतु $f = 50$ Hz , $V = 200$ V

बल्ब का प्रतिरोध $R = \frac{100}{10} = 10\Omega$

प्रतिबाधा $Z = \frac{\text{प्रत्यावर्ती स्त्रोत की वोल्टता}}{\text{धारा}} = \frac{200}{10} = 20\Omega$

$$\omega = 2\pi f = 2\times3.14\times50 = 314 \text{ rad/s}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (2\pi fL)^2}$$

$$20 = \sqrt{(10)^2 + (314\times L)^2}$$

$$L^2 = \frac{300}{314\times314}$$

या $L = \frac{\sqrt{300}}{314} = 0.055$ H

उदाहरण 10.14 $1/\pi$ H स्वप्रेरकत्व वाली एक कुण्डली को 300 Ω के प्रतिरोध से श्रेणीक्रम में जोड़ा गया है। यदि इस संयोजन पर 200 Hz आवृत्ति वाले स्त्रोत से 200 V विभव आरोपित किया जाए तो धारा और वोल्टता के मध्य कलांतर ज्ञात करो।

हलः $\tan\phi = \frac{L\omega}{R} = \frac{2\pi fL}{R}$

दिया है $L = \frac{1}{\pi}$ H , $f = 200$ Hz, $R = 300\,\Omega$

अतः $\tan\phi = \frac{2\pi\times200\times1}{300\times\pi} = \frac{4}{3}$

अतः $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

उदाहरण 10.15 एक कुण्डली 220 V तथा 50 Hz आवृत्ति वाले प्रत्यावर्ती धारा स्त्रोत से 2 A धारा तथा 200 V शक्ति लेती है। कुण्डली के प्रतिरोध तथा प्रेरकत्व का मान ज्ञात करो।

हलः शक्ति $P = I_{rms}^2 R$

दिया है $V_{rms} = 220$ V, $f = 50$ Hz, , $I_{rms} = 2$ A

$P = 200$ W

अतः $R = \frac{P}{I_{rms}^2} = \frac{200}{(2)^2} = 50\,\Omega$

प्रतिबाधा $Z = \frac{V_{rms}}{I_{rms}} = \frac{220}{2} = 110\Omega$

∵ $Z^2 = R^2 + X_L^2$

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(110)^2 - (50)^2} = 98\Omega$$

$$X_L = L\times2\pi f$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{98}{2\times3.14\times50}$$

$$L = 0.312 \text{ H}$$

उदाहरण 10.16 नगण्य प्रतिरोध की किसी कुण्डली को 120 Ω के प्रतिरोध से श्रेणीक्रम में जोड़ा गया है, कुण्डली का प्रेरकत्व 0.4 H है। इस पर 200 / π H तथा 100 V की प्रत्यावर्ती वोल्टता लगाए तो कुल प्रतिबाधा, कला कोण, धारा ज्ञात करो।

हलः प्रतिबाधा $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$

दिया है $L = 0.4$ H, $R = 120\ \Omega$, $f = \frac{200}{\pi}$ Hz

$$V_{rms} = 100 \text{ V}$$

$$Z = \sqrt{(120)^2 + (400\times0.4)^2}$$

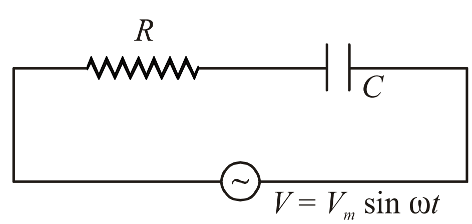
$$Z = 200\,\Omega$$

$$\omega = 2\times3.14\times\frac{200}{\pi} = 400 \text{ rad/s}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{400\times0.4}{120}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{100}{200} = 0.5 \text{ A}$$

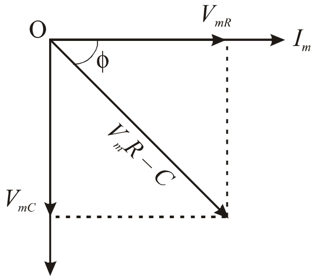
10.4.5 R-C परिपथ (R-C Circuit)



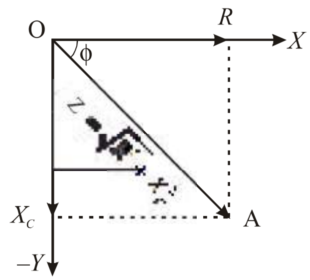
चित्र 10.23 श्रेणी R–V के साथ जुड़ा प्रत्यावर्ती वोल्टता स्रोत

चित्र 10.23 में प्रदर्शित विद्युत परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता स्त्रोत $V = V_m \sin\omega t$ से श्रेणीक्रम से संधारित्र C और प्रतिरोध R जुड़े हैं। किसी समय t पर परिपथ में प्रवाहित धारा I तथा प्रतिरोध और संधारित्र पर विभवांतर क्रमशः V_R और V_C है। यदि संधारित्र और प्रतिरोध पर परिणामी वोल्टता V_{RC} है तो किरचॉफ के लूप नियम से

$$V - V_{RC} = 0$$



चित्र 10.24 श्रेणी $R–C$ परिपथ का सदिश आरेख



चित्र 10.25 प्रतिबाधा आरेख

चित्र 10.24 में प्रदर्शित सदिश आरेख की सहायता से इस परिपथ में प्रभावी प्रतिरोध तथा वोल्टता एवं धारा के मध्य कलांतर ज्ञात करते है। वोल्टता V_{mR} और धारा I_m समान कला में होंगे लेकिन वोल्टता V_{mC} धारा I_m से $\pi/2$ कोण पीछे होगी। अतः परिणामी वोल्टता

$$V_{mRC} = \sqrt{V_{mR}^2 + V_{mC}^2}$$

$$V_{mR} = I_m R \text{ तथा } V_{mc} = I_m X_C$$

अतः $$V_{mRC} = \sqrt{(I_m R)^2 + (I_m X_C)^2}$$

$$V_{mRC} = I_m\sqrt{R^2 + X_C^2}$$

या $$I_m = \frac{V_{mRC}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \qquad \ldots (10.20)$$

यहाँ $\sqrt{R^2 + X_C^2}$, परिपथ का प्रभावी प्रतिरोध है।

जिसे परिपथ की प्रतिबाधा कहते हैं। प्रतिबाधा $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{c\omega}\right)^2} \qquad \ldots (10.21)$$

चित्र 10.24 से स्पष्ट है कि श्रेणी $R–C$ परिपथ में ज्यावक्रीय वोल्टता V लगाने पर वोल्टता प्राप्त ज्यावक्रीय धारा I से ϕ कोण पीछे अर्थात् धारा, वोल्टता से ϕ कोण आगे है।

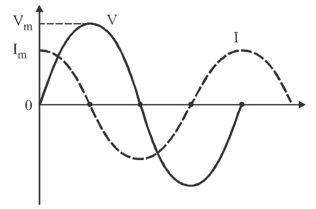
अतः $$I = I_m \sin(\omega t + \phi) \qquad \ldots (10.22)$$

चित्र 10.25 से R–C श्रेणी परिपथ की प्रतिबाधा ज्ञात करते हैं। प्रतिरोध R को X-अक्ष की ओर तथा धारितीय प्रतिघात X_C को Y-अक्ष की ओर बनाते हैं। इस प्रकार प्रतिबाधा Z को OA से प्रदर्शित किया जा सकता है।OP, X-अक्ष से ϕ कोण बनाता है

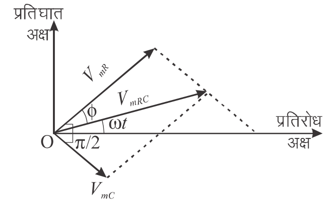
चित्र 10.24 से $\tan\phi = \frac{V_{mc}}{V_{mR}} = \frac{I_m X_c}{I_m R} = \frac{X_c}{R}$

अतः $$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right) \qquad \ldots (10.23)$$

श्रेणी $R–C$ परिपथ में ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा धारा का ωt के साथ परिवर्तन आरेख खींचने पर चित्र 10.26 के समान प्राप्त होता है, जिससे ज्ञात होता है कि धारा की आवृत्ति भी वोल्टता के समान और वोल्टता से ϕ कोण आगे है। चित्र 10.27 श्रेणी $R–C$ परिपथ में V और I के कला आरेख (फेजर) को प्रदर्शित करता है।



चित्र 10.26 श्रेणी $R–C$ में V और I के मध्य कला आरेख



चित्र 10.27 प्रतिबाधा $R–C$ परिपथ में फेजर आरेख

उदाहरण 10.17 100 μF धारिता के एक संधारित्र तथा 40 Ω के एक प्रतिरोध का श्रेणीक्रम संयोजन 110 V, 60 H की प्रत्यावर्ती स्त्रोत से जुड़ा है। परिपथ में अधिकतम धारा का मान ज्ञात करो।

हल: $$I_m = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$$

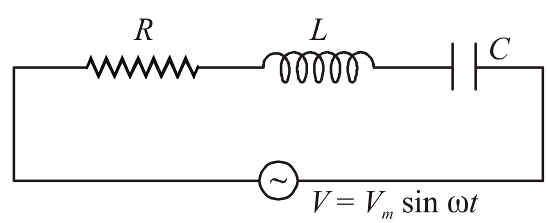
दिया है $V = 110$ V, $C = 100 \times 10^{-6}$ F
$R = 40\ \Omega$, $f = 60$ Hz

$$I_m = \frac{110}{\sqrt{(40)^2 + \frac{1}{(100\times10^{-6}\times2\times3.14\times60)^2}}}$$

$$= \frac{110}{\sqrt{(40)^2 + \frac{1}{(376.8\times10^{-4})^2}}} = \frac{110}{\sqrt{(40)^2 + (26.54)^2}}$$

= 2.29 A

10.4.6 LCR श्रेणी परिपथ (LCR Series Circuit)



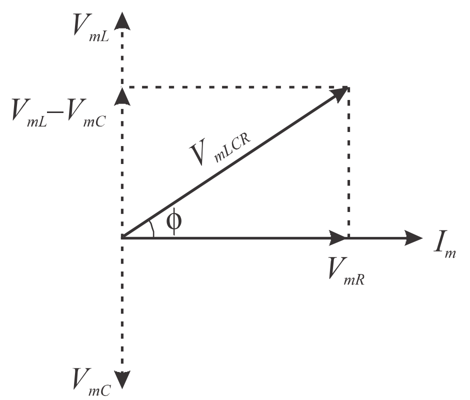
चित्र 10.28 श्रेणी में L-C-R के साथ जुड़ा प्रत्यावर्ती वोल्टता स्रोत

माना प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती वोल्टता $V = V_m \sin\omega t$ आरोपित है। परिपथ चित्र 10.28 में

दर्शाये अनुसार प्रतिरोध (R), प्रेरकत्व (L) तथा धारिता (C) श्रेणी क्रम में जुड़े हैं (चित्र 10.28) यदि परिपथ में धारा का तात्क्षणिक मान I है तो प्रतिरोध के सिरों पर वोल्टता $(V_R) = IR$, प्रेरक के सिरों पर वोल्टता $(V_L) = IX_L$ तथा संधारित्र के सिरों पर वोल्टता $(V_C) = IX_C$ होगी। किरचॉफ के लूप नियम से

$$V - V_{LCR} = 0$$

यहाँ V_{LCR} प्रतिरोध, प्रेरक और संधारित्र पर परिणामी वोल्टता है।



चित्र 10.29 श्रेणी LCR परिपथ का सदिश आरेख

सदिश आरेख चित्र 10.29 की सहायता से श्रेणी LCR परिपथ में प्रभावी प्रतिरोध तथा प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा धारा के मध्य कलांतर ज्ञात कर सकते हैं। इसमें V_{mR}, I_m की दिशा में, V_{mL} को I_m से $+\pi/2$ कोण पर तथा V_{mC} को I_m से $-\pi/2$ कोण पर प्रदर्शित किया गया है, क्योंकि V_{mL} धारा की दिशा से 90^o आगे और V_{mC} धारा से 90^o पीछे रहता है। V_{mL} और V_{mC} की परिणामी वोल्टता $(V_{mL} - V_{mC})$ होगी क्योंकि V_{mL} और V_{mC} के मध्य π का कलांतर है।

अतः परिणामी वोल्टता

$$V_{mLCR} = \sqrt{(V_{mR})^2 + (V_{mL} - V_{mC})^2}$$

$\because$ $\quad V_{mR} = I_m R,\ V_{mL} = I_m X_L$ और $V_{mC} = I_m X_C$

अतः $\quad V_{mLCR} = \sqrt{(I_m R)^2 + (I_m X_L - I_m X_C)^2}$

$$= I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

या $$I_m = \frac{V_{mLCR}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad \ldots(10.24)$$

यहाँ $\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ परिपथ का प्रभावी प्रतिरोध है। जिसे परिपथ की प्रतिबाधा Z कहते हैं।

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \ldots(10.25)$$

या $$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \qquad \ldots(10.26)$$

सदिश आरेख (10.29) को $V_{mL} > V_{mC}$ मानकर बनाया गया है अतः परिणामी वोल्टता, धारा से ϕ कोण आगे है यदि $V_{mC} > V_{mL}$ हो तो परिणामी वोल्टता, धारा से ϕ कोण पीछे होगा।

अतः $$\tan\phi = \frac{V_{mL} - V_{mC}}{V_{mR}} = \frac{I_m X_L - I_m X_C}{I_m R}$$

या $$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \qquad \ldots(10.27)$$

समीकरण (10.26) और (10.27) से स्पष्ट है कि प्रतिबाधा Z और कलांतर ϕ परिपथ के तीनों अवयवों R, X_L और X_C पर निर्भर करते हैं।

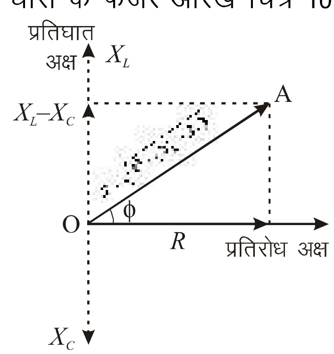
विशेष स्थितियाँ

(i) यदि $V_{mL} > V_{mC}$ या $X_L > X_C$ है तो

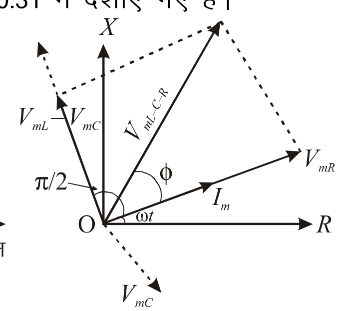
समीकरण (10.25) से $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

(10.27) से $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$

इस स्थिति में ϕ धनात्मक होगा अर्थात् परिणामी वोल्टता V_{mLCR} की कला धारा से ϕ आगे होगी। ϕ का मान शून्य से $\pi/2$ के मध्य होता है अर्थात् यह परिपथ $R-L$ परिपथ की तरह व्यवहार करता है और परिणामी प्रतिघात $X_L - X_C$ प्रेरणिक प्रतिघात की तरह व्यवहार करता है इस स्थिति में Z का मान चित्र 10.30 की सहायता से तथा प्रत्यावर्ती वोल्टता एवं प्रत्यावर्ती धारा के फेजर आरेख चित्र 10.31 में दर्शाए गए हैं।



चित्र 10.30 प्रतिबाधा आरेख (जब $X_L > X_C$)



चित्र 10.31 फेजर आरेख (जब $V_{mL} > V_{mC}$)

परिपथ में धारा

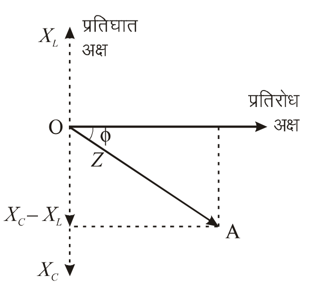
$$I = I_m \sin(\omega t - \phi) \qquad \ldots (10.28)$$

(ii) यदि $V_{mL} < V_{mC}$ या $X_L < X_C$ है तो समीकरण (10.25) से

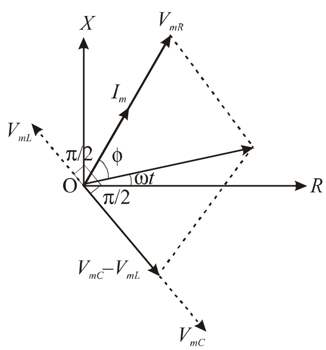
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$$

(10.27) से $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_C - X_L}{R}\right)$

इस स्थिति में परिणामी वोल्टता V_{mLCR} की कला धारा से ϕ कोण पीछे रहेगी। ϕ का मान शून्य से $\pi/2$ के मध्य होगा। अर्थात् यह परिपथ $R-C$ परिपथ की तरह व्यवहार करता है और परिणामी प्रतिघात $X_C - X_L$ धारितीय प्रतिघात की तरह व्यवहार करता है। इस स्थिति में Z का मान चित्र 10.32 की सहायता से तथा प्रत्यावर्ती वोल्टता एवं धारा के फेजर आरेख चित्र 10.33 में दर्शाए गए हैं।



चित्र 10.32 प्रतिबाधा आरेख (जब $X_L < X_C$)



चित्र 10.33 फेजर आरेख (जब $V_{mL} < V_{mC}$)

परिपथ में धारा

$$I = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

(iii) यदि $V_{mL} = V_{mC}$ या $X_L = X_C$ है तो $\phi = 0$

अर्थात् इस स्थिति में परिणामी वोल्टता तथा धारा की कला एक ही होगी। इस स्थिति को अनुनादी स्थिति कहते हैं।

10.5 श्रेणी L–C–R अनुनादी परिपथ (Series L–C–R Resonance Circuit)

जब किसी प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में प्रेरकत्व L, संधारित्र C तथा प्रतिरोध R श्रेणीक्रम में जुड़े हो तो सामान्यतः परिपथ में इन अवयवों के कारण परिणामी वोल्टता तथा धारा के मध्य कलांतर होता है। यह कलांतर परिपथ के प्रतिघात के कारण होता है।

यदि परिपथ में आरोपित प्रत्यावर्ती वोल्टता की आवृत्ति को बढ़ाया जाए तो परिपथ में प्रेरकीय प्रतिघात $L\omega$ के मान में वृद्धि और धारितीय प्रतिघात $1/C\omega$ के मान में कमी होगी। आवृत्ति कम करने पर प्रेरकीय प्रतिघात घटेगा तथा धारितीय प्रतिघात बढ़ेगा। परिपथ में एक ऐसी अवस्था प्राप्त होती है जबकि एक विशेष आवृत्ति पर प्रेरकीय प्रतिघात, धारितीय प्रतिघात के बराबर हो जाता है जिससे परिपथ में परिणामी प्रतिघात $(X_L - X_C)$ शून्य होने से परिपथ की प्रतिबाधा न्यूनतम होती है तथा परिणामी वोल्टता तथा धारा एक ही कला में होते हैं। इस आवृत्ति पर परिपथ में अधिकतम धारा प्रवाहित होती है। प्रत्यावर्ती परिपथ की इस अवस्था को वैद्युत अनुनाद की अवस्था तथा परिपथ को श्रेणी अनुनादी परिपथ कहते हैं।

अनुनाद की अवस्था में

$$X_L = X_C \qquad \ldots (10.29)$$

अतः परिणामी प्रतिघात

$$X = X_L - X_C = 0$$

समीकरण 10.25 से

$$Z = Z_{min} = R \qquad \ldots (10.30)$$

अर्थात् परिपथ की प्रतिबाधा न्यूनतम (केवल प्रतिरोध के बराबर) होती है।

समीकरण (10.27) से

$$\phi = \tan^{-1}(0) = 0 \qquad \ldots (10.31)$$

अर्थात् परिणामी वोल्टता तथा धारा एक ही कला में होते हैं।

अतः समीकरण (10.28) से

$$I = I_m \sin \omega t \qquad \ldots (10.32)$$

समीकरण (10.29) से

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

अतः अनुनाद की स्थिति में $L\omega_r = \frac{1}{C\omega_r}$

$$\therefore \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \ldots (10.33)$$

यहाँ ω_r अनुनादी कोणीय आवृत्ति है।

अतः अनुनादी आवृत्ति

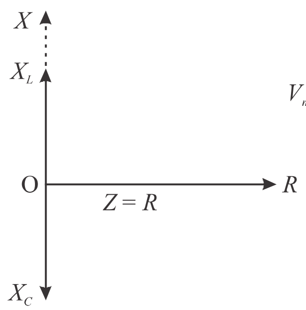
$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \ldots (10.34)$$

धारा का शिखर मान $I_m = \frac{V_{mLCR}}{Z}$ से

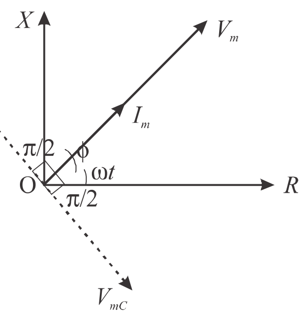
$$(I_m)_{\max} = \frac{V_{mLCR}}{R}$$

या $\quad (I_{rms})_{\max} = \frac{V_{rms}}{R}$

इस अवस्था में श्रेणी L–C–R परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा धारा के फेजर ओरख चित्र 10.35 तथा प्रतिबाधा चित्र 10.34 में प्रदर्शित हैं।

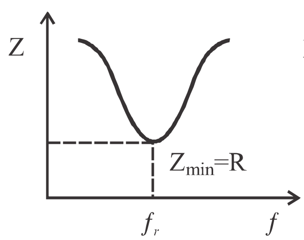


चित्र 10.34 अनुनादी स्थिति में प्रतिबाधा आरेख

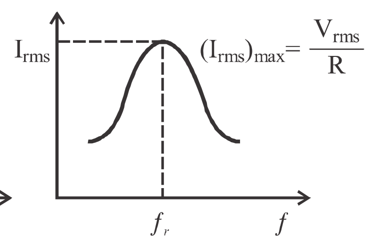


चित्र 10.35 अनुनादी LCR परिपथ का फेजर आरेख

श्रेणी L–C–R परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता की आवृत्ति f और परिपथ में प्रवाहित धारा I_{rms} के मध्य ग्राफ चित्र 10.37 के अनुसार तथा आवृत्ति और प्रतिबाधा Z के मध्य ग्राफ चित्र 10.36 के अनुसार प्राप्त होता है क्योंकि अनुनादी आवृत्ति f_r पर $(I_{rms})_{max}$ तथा Z_{min} प्राप्त होती है।



चित्र 10.36 प्रतिबाधा–आवृत्ति परिवर्तन आरेख



चित्र 1037 धारा I_{rms} तथा आवृत्ति f के मध्य आरेख

LCR परिपथ का विश्लेषणात्मक हल

LCR परिपथ के लिए वोल्टता समीकरण

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{c} = V_m \sin \omega t$$

$\because$ $$I = \frac{dq}{dt}$$

अतः $$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = V_m \sin\omega t \quad \ldots(i)$$

यह समीकरण प्रणोदित अवमंदित दोलक के समीकरण के समान है अतः इसका हल

$$q = q_m \sin(\omega t + \theta) \quad \ldots(ii)$$

अतः $$\frac{dq}{dt} = q_m \omega \cos(\omega t + \theta) \quad \ldots(iii)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -q_m\omega^2 \sin(\omega t + \theta) \quad \ldots(iv)$$

इन मानों को समीकरण (i) में रखने पर

$$q_m\omega[R\cos(\omega t + \theta) + (X_C - X_L)\sin(\omega t + \theta)] = V_m \sin\omega t$$

या

$$q_m\omega z\left[\frac{R}{Z}\cos(\omega t + \theta) + \left(\frac{X_C - X_L}{Z}\right)\sin(\omega t + \theta)\right] = V_m \sin\omega t$$

माना $$\frac{R}{Z} = \cos\phi, \frac{X_C - X_L}{Z} = \sin\phi$$

अतः $$\tan\phi = \frac{X_C - X_L}{R}$$

या $$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_C - X_L}{R}\right)$$

या

$$q_m\omega z[\cos(\omega t + \theta)\cos\phi + \sin(\omega t + \theta)\sin\phi] = V_m \sin\omega t$$

$$q_m\omega z \ \cos(\omega t + \theta - \phi) = V_m \sin\omega t$$

उपर्युक्त समीकरण के दोनों पक्षों की तुलना करने पर

$$V_m = q_m\omega z = I_m z$$

अतः $$I_m = q_m\omega$$

तथा $$\theta - \phi = -\frac{\pi}{2}$$

या $$\theta = -\frac{\pi}{2} + \phi$$

अतः समीकरण (iii) से

$$\frac{dq}{dt} = I = I_m\cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})$$

या $$I = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

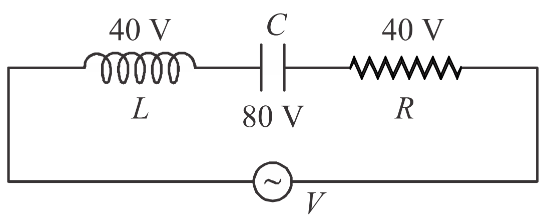
$\frac{R}{z} = \cos\phi$ तथा $\frac{X_C - X_L}{Z} = \sin\phi$ समीकरणों का वर्ग कर जोड़ने पर

$$\frac{R^2}{Z^2} + \frac{(X_C - X_L)^2}{z^2} = 1$$

$$Z^2 = R^2 + (X_C - X_L)^2$$

$$Z = \sqrt{(R^2) + (X_C - X_L)^2}$$

उदाहरण 10.18 निम्न परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा स्त्रोत की वोल्टता की गणना करो।



हल: $V_{rms} = \sqrt{V_R^2 + (V_C - V_L)^2}$

दिया है $V_R = 40$ V,

$V_L = 40$ V, $V_C = 80$ V

$= \sqrt{(40)^2 + (80-40)^2}$

$\therefore \quad = 40\sqrt{2} = 56.56$ V

उदाहरण 10.19 एक L–C–R श्रेणी परिपथ में प्रतिरोध 12 Ω प्रेरणिक प्रतिघात 18 Ω और धारितीय प्रतिघात 23 Ω है। परिपथ में प्रतिबाधा और कलांतर ज्ञात करो।

हल: $Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$

दिया है $R = 12\Omega, X_C = 23\Omega, X_L = 18\Omega$

$$Z = \sqrt{(12)^2 + (23-18)^2}$$

$$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13\,\Omega$$

$$\tan\phi = \frac{X_C - X_L}{R} = \frac{5}{12}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$$

उदाहरण 10.20 110 V तथा 50 Hz के स्त्रोत से श्रेणीक्रम में 10 Ω प्रतिरोध, 2 / π H का प्रेरकत्व तथा 1 / π μF का संधारित्र जुड़े हैं। धारा और वोल्टता के मध्य कलांतर ज्ञात करो।

हल: $\tan\phi = \dfrac{X_C - X_L}{R}$

दिया है $R = 10\Omega, f = 50\,Hz, L = \dfrac{2}{\pi}H, C = \dfrac{1}{\pi}\times 10^{-6}F$

$$\tan\phi = \frac{\dfrac{1}{2\pi f \times C} - L\times 2\pi f}{R}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2\pi\times 50\times\dfrac{1}{\pi}\times 10^{-6}} - \dfrac{2}{\pi}\times 2\pi\times 50}{10}$$

$$\frac{10^4 - 200}{10} = 980$$

$$\phi = \tan^{-1}(980)$$

उदाहरण 10.21 LCR श्रेणी परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा धारा के मान निम्न हैं

$$V = 300\sin 100t$$

$$I = 6\sin(100t - \phi)$$

यदि परिपथ में प्रतिरोध का मान 40 Ω हो तो परिपथ में (i) प्रतिबाधा (ii) प्रतिघात (iii) वोल्टता तथा धारा में कलांतर ज्ञात करो।

हल: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

दिया है $V_m = 300\,\text{V}, I_m = 6\text{A}, \omega = 100\,\text{rad/s}$

(i) $R = \dfrac{V_m}{I_m} = \dfrac{300}{6} = 50\Omega$

(ii) $Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$

$\therefore \quad (X_L - X_C) = \sqrt{Z^2 - R^2}$

$$= \sqrt{(50)^2 - (40)^2} = 30\,\Omega$$

(iii) $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{X_L - X_C}{R}\right)$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

उदाहरण 10.22 एक प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में $L = 0.5$ H और $C = 8$ μF जुड़े हैं। परिपथ में अधिकतम धारा के लिए कोणीय आवृत्ति और आवृत्ति का मान ज्ञात करो।

हल: $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

अधिकतम धारा के लिए अनुनादी स्थिति होगी।

दिया है $L = 0.5$ H, $C = 8\times 10^{-6}$ F

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{0.5\times 8\times 10^{-6}}} = \frac{10^3}{2} = 500\,\text{rad/s}$$

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{500}{2\pi} = \frac{250}{\pi}\text{Hz}$$

उदाहरण 10.23 अनुनादी अवस्था में परिपथ में लगे प्रेरकत्व धारिता तथा प्रतिरोध के मान क्रमशः 0.1 H, 200 μF, 20 Ω है। उसी अनुनादी आवृत्ति पर यदि परिपथ में प्रेरकत्व का मान 100 H कर दिया जाए तो धारिता का आवश्यक मान ज्ञात करो।

हलः दिया है प्रथम स्थिति में $L = 0.1$ H, $C = 200$ μF

द्वितीय स्थिति में $L' = 100$ H

$$F_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L'C'}}$$

या $LC = L'C'$

$0.1 \times 200 \times 10^{-6} = 100 \times C'$

$$C' = \frac{0.1 \times 200 \times 10^{-6}}{100} = 0.2\,\mu\text{F}$$

उदाहरण 10.24 एक प्रसारण केन्द्र से 300 m तरंग दैर्ध्य वाली तरंगें प्रसारित हो रही है। एक 2.4 μF धारिता वाला संधारित्र उपलब्ध है तो अनुनादी परिपथ के लिए आवश्यक प्रेरकत्व की गणना करो।

हलः $$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

दिया है $\lambda = 300\,\text{m}$, $C = 2.4\,\mu\text{F}$

आवृत्ति $$f = v = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{300} = 10^6\,Hz$$

अतः $$L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C}$$

$$L = \frac{1}{4 \times (3.14)^2 \times (10^6)^2 \times (2.4 \times 10^{-6})} = 10^{-8}\,\text{H}$$

उदाहरण 10.25 श्रेणी LCR परिपथ में 220 V तथा 50 Hz के स्त्रोत के साथ 11 Ω का प्रतिरोध, $2/\pi^2$ H का प्रेरकत्व जुड़ा है। संधारित्र के किस मान के लिए परिपथ अनुनादी अवस्था में होगा, परिपथ में प्रवाहित धारा का मान भी ज्ञात करो।

हलः $$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

दिया है $V_{rms} = 220\,\text{V}, f = 50\,\text{Hz}, R = 11\,\Omega, L = \frac{2}{\pi^2}\,\text{H}$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L f^2} = \frac{1}{4\pi^2 \times \frac{2}{\pi^2} \times 50 \times 50} = 50\,\mu\text{F}$$

अनुनादी परिपथ में धारा

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{z_{\min}} = \frac{V_{rms}}{R}$$

$$I_{rms} = \frac{220}{11} 20\Omega$$

10.6 श्रेणी अनुनादी परिपथ में अर्द्धशक्ति बिन्दु आवृत्तियाँ, बैण्ड चौड़ाई तथा विशेषता गुणांक (Half Power Point Frequencies, Bandwidth and Quality Factor of a Series Resonance Circuit)

10.6.1 अर्द्ध शक्ति बिन्दु या आवृत्तियाँ (Half Power Frequencyies)

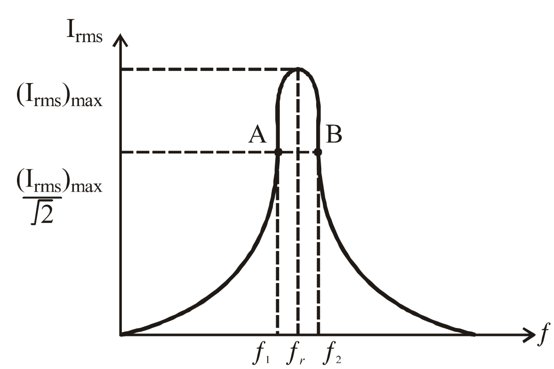
चित्र 10.38 में LCR श्रेणी परिपथ में आवृत्ति f परिवर्तन के साथ धारा I_{rms} के परिवर्तन को दर्शाया गया है। अनुनाद की स्थिति में अनुनादी आवृत्ति f_r पर धारा का मान अधिकतम $(I_{rms})_{\max}$ होता है। इस आवृति पर परिपथ में शक्ति क्षय$(I^2_{rms})_{\max}R$ अधिकतम होगा। यहाँ $(I_{rms})_{\max}$ अनुनाद पर प्रभावी धारा है।

अनुनादी आवृत्ति के दोनों ओर दो आवृत्तियाँ f_1 और f_2 पर परिपथ में शक्ति क्षय उसके अनुनादी मान का आधा होता है। इन आवृत्तियों (f_1, f_2) को अर्द्धशक्ति बिन्दु आवृत्तियाँ कहते है। वक्र के A और B बिन्दु 'अर्द्ध शक्ति बिन्दु' कहलाते है। यदि इन बिन्दुओं पर प्रभावी धारा I_{rms} हो तो

$$I^2_{rms} R = \frac{1}{2}(I_{rms})^2_{\max} R$$

$$I_{rms} = \frac{(I_{rms})_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$= 0.707\left(I_{rms}\right)_{rms}$$



चित्र 10.38 धारा–आवृत्ति परिवर्तन आरेख

अतः अर्द्धशक्ति बिन्दुओं A और B पर धारा का मान अधिकतम मान का $1/\sqrt{2}$ रह जाता है तथा परिपथ की शक्ति आधी रह जाती है, इन्हें अर्द्धशक्ति बिन्दु या आवृत्तियाँ कहते हैं।

10.6.2 बैण्ड चौड़ाई (Band Width)

अर्द्ध शक्ति आवृत्तियों के मध्य आवृत्ति अंतराल में LCR श्रेणी परिपथ स्त्रोत से अधिक ऊर्जा ग्रहण करने में समर्थ होता है। अर्द्ध शक्ति आवृत्तियों के मध्य आवृत्ति अंतराल को परिपथ की बैण्ड चौड़ाई कहते हैं। अर्थात्

बैण्ड चौड़ाई $= f_2 - f_1$

अर्द्ध शक्ति आवृत्तियों f_1 और f_2 पर

$$I_{rms} = \frac{(I_{rms})_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{c\omega})^2}} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{2}R}$$

या $$R^2 + (L\omega - \frac{1}{c\omega})^2 = 2R^2$$

या $$(L\omega - \frac{1}{c\omega})^2 = R^2$$

या $$\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right) = \pm R$$

बिन्दु A के लिए $L\omega_1 - \dfrac{1}{c\omega_1} = -R$ . . . (10.35)

बिन्दु B के लिए $L\omega_2 - \dfrac{1}{c\omega_2} = R$ . . . (10.36)

समीकरण 10.35 और 10.36 को जोड़ने पर

$$L(\omega_1 + \omega_2) - \frac{1}{C}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) = 0$$

या $$L(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{C}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1\omega_2}\right)$$

या $$\omega_1\omega_2 = \frac{1}{LC} \qquad . . . (10.37)$$

इसी प्रकार समीकरण (10.36) से (10.35) को घटाने पर

$$L(\omega_2 - \omega_1) + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right) = 2R$$

या $$L(\omega_2 - \omega_1) + \frac{1}{C}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1\omega_2}\right) = 2R$$

समीकरण (10.37) से $\omega_1\omega_2$ का मान रखने पर

$$2L(\omega_2 - \omega_1) = 2R$$

$$(\omega_2 - \omega_1) = \frac{R}{L} \qquad . . . (10.38)$$

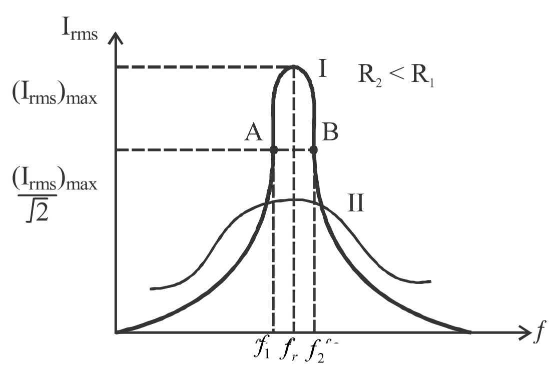
अतः बैण्ड चौड़ाई $= \omega_2 - \omega_1 = \dfrac{R}{L}$

या $$f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L} \qquad . . . (10.39)$$

उपर्युक्त समीकरण (10.39) से बैण्ड चौड़ाई का व्यंजक प्राप्त होता है।

10.6.3 विशेषता गुणांक (Quality Factor)

किसी श्रेणी L–C–R परिपथ का व्यवहार परिपथ में उपस्थित प्रतिरोध R के मान पर निर्भर करता है। प्रतिरोध R के भिन्न–भिन्न मानों के लिए दिए गए वक्रों (चित्र 10.39) का अध्ययन करने से ज्ञात होता है कि जैसे–जैसे प्रतिरोध R का मान कम होता है, अनुनाद वक्र तीक्ष्ण होता जाता है। अनुनादी अवस्था में धारा का मान अधिकतम $(I_{rms})_{\max}$ तथा बैण्ड चौड़ाई $f_2 - f_1 = \dfrac{R}{2\pi L}$ का मान कम होता है। अतः R के अल्प मान के लिए धारा और आवृत्ति के मध्य अनुनाद वक्र तीक्ष्ण प्राप्त होता है जैसा कि चित्र 10.39 वक्र I द्वारा प्रदर्शित है।



चित्र 10.39 दो अनुनादी वक्रों की तुलना से अनुनाद की तीक्ष्णता का मापन

R का मान अधिक होने पर धारा के शिखर मान में कमी होती है और बैंड चौड़ाई बढ़ जाती है अतः अनुनाद वक्र चपटा हो जाता है जैसा कि चित्र 10.39 वक्र II द्वारा प्रदर्शित है। अनुनादी आवृत्ति (f_r) के दोनों ओर आवृत्ति परिवर्तन करने पर धारा के शिखर मान में कमी जितनी तेजी से होती है, अनुनादी वक्र उतना ही अधिक तीक्ष्ण होता है तथा यदि आवृत्ति परिवर्तन करने पर धारा के शिखर मान में कमी धीरे–धीरे होती है तो अनुनादी वक्र चपटा हो जाता है।

अनुनादी वक्र की तीक्ष्णता की गणितीय रूप से व्याख्या

एक अभिलाक्षणिक गुणांक द्वारा की जाती है जिसे विशेषता गुणांक Q कहते हैं। किसी अनुनादी परिपथ के अनुनाद की तीक्ष्णता परिपथ के विशेषता गुणांक Q से निम्नानुसार दी जाती है

$$Q = \frac{\text{अनुनादी आवृत्ति}}{\text{बैण्ड चौडाई}} = \frac{f_r}{f_2 - f_1} = \frac{L\omega_r}{R} \quad \ldots (10.40)$$

$\because \quad \omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

अतः $\quad Q = \dfrac{L\omega_r}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \quad \ldots (10.41)$

या $\quad Q = \dfrac{\text{अनुनादी आवृत्ति पर प्रेरकीय या धारितीय प्रतिघात}}{\text{प्रतिरोध}}$

या $\quad Q = \dfrac{\text{अनुनादी स्थिति में L या C पर विभवांतर}}{\text{परिपथ में आरोपित वोल्टता}}$

Q का मान सामान्यतः एक से अधिक होता है अतः श्रेणी अनुनाद में प्रेरकत्व या धारिता के सिरों के मध्य वोल्टता का मान आरोपित वोल्टता से अधिक होता है अतः श्रेणी अनुनाद परिपथ में वोल्टता आवर्धन होता है। विशेषता गुणांक Q अनुनादी परिपथ के वोल्टता प्रवर्धन का भी मापक होता है।

श्रेणी अनुनादी परिपथ का उपयोग रेडियो को ट्यून करने में किया जाता है अतः LCR परिपथ को ट्यूनिंग या वरणकारी परिपथ भी कहते है। किसी रेडियों का ऐंटिना अनेक रेडियो स्टेशनों से संकेतों का अभिग्रहण करता है। ऐंटिना द्वारा अभिग्रहित संकेत

रेडियों के समस्वरण परिपथ में स्त्रोत का कार्य करते हैं इसलिए परिपथ अनेक आवृत्तियों पर संचालित किया जा सकता है। किसी विशिष्ट रेडियो स्टेशन को सुनने के लिए हम रेडियो को समस्वरित करते हैं, इसके लिए समस्वरण परिपथ में लगे संधारित्र की धारिता को परिवर्तित कर परिपथ की आवृत्ति को परिवर्तित करते हैं जब परिपथ की अनुनादी आवृत्ति अभिगृहित रेडियो संकेतों की आवृत्ति के बराबर हो जाती है तो परिपथ में उस विशिष्ट रेडियो स्टेशन से आने वाले संकेतों की आवृत्ति पर धारा का शिखर मान अधिकतम हो जाता हे। शेष सभी आवृत्तियों की धारा का मान कम होने पर इन स्टेशनों के संकेत सुनाई नहीं देते। विशेषता गुणांक Q अधिक या अनुनाद तीक्ष्ण होने पर अन्य स्टेशनों के संगत धारा का मान बहुत कम होता है।

उदाहरण 10.26 LCR परिपथ में यदि $R = 100\ \Omega$, $L = 1$ mH तथा $C = 1000\ \mu$F है तो परिपथ की अनुनादी आवृत्ति तथा बैण्ड चौड़ाई ज्ञात करो।

हलः अनुनादी आवृत्ति $f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

दिया है $R = 100\,\Omega, L = 1\text{mH}, C = 1000\,\mu F$

अतः $\quad f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{10^{-3}\times 1000\times 10^{-6}}} = \dfrac{1000}{2\pi}\text{Hz}$

बैण्ड चौड़ाई $f_2 - f_1 = \dfrac{R}{2\pi L} = \dfrac{100}{2\pi\times 10^{-3}} = \dfrac{5000}{\pi}\text{Hz}$

उदाहरण 10.27 L-C-R परिपथ में प्रतिरोध $R = 14\,\Omega$ और प्रेरकत्व $L = 7\text{mH}$ है। परिपथ में स्त्रोत की आवृत्ति परिपथ की अनुनादी आवृत्ति के बराबर है यदि परिपथ का विशेषता गुणांक 1/2 हो तो परिपथ में (i) बैण्ड चौड़ाई (ii) धारितीय प्रतिघात ज्ञात करो।

हलः बैण्ड चौडाई $\omega_2 - \omega_1 = \dfrac{R}{L}$

दिया है $R = 14\Omega, L = 7\times 10^{-3} H, Q = \dfrac{1}{2}$

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{14}{7\times 10^{-3}} = 2\times 10^3 \text{ m}$$

विशेषता गुणांक $Q = \dfrac{1}{c\omega\times R}$

या $\quad \dfrac{1}{C\omega} = Q\times R = \dfrac{1}{2}\times 14 = 7\,\Omega$

उदाहरण 10.28 एक LCR श्रेणी परिपथ की अनुनादी आवृत्ति 600 Hz है। 570 एवं 620 Hz आवृत्तियों पर परिपथ में धारा उसकी अनुनादी स्थिति की धारा से $1/\sqrt{2}$ गुनी रह जाती है। परिपथ का विशेषता गुणांक, अनुनादी स्थिति में X_L, X_C, L और C का मान ज्ञात करो। $(R = 3\,\Omega)$

हलः विशेषता गुणांक $Q = \dfrac{f_r}{f_2 - f_1}$

दिया है $f_r = 600\,\text{Hz},\ f_1 = 570\,\text{Hz},\ f_2 = 620\,\text{Hz}$

$$Q = \frac{600}{620 - 570} = 12$$

$\because \quad Q = \dfrac{L\omega_r}{R}$

अतः $\quad L\omega_r = Q\times R = 12 \text{ x } 3 = 36\ \Omega$

$\because \quad$ अनुनादी स्थिति में $L\omega_r = \dfrac{1}{C\omega_r}$

अतः $\quad \dfrac{1}{C\omega_r} = X_C = 36\ \Omega$

$$L\omega_r = 36$$

अतः $$L = \frac{36}{\omega r} = \frac{36}{2\pi fr} = \frac{36}{2\times 3.14\times 600} = 9.56\,\text{mH}$$

$$\frac{1}{C\omega_r} = 36$$

अतः $$C = \frac{1}{36\times 2\pi fr} = \frac{1}{36\times 2\times 3.14\times 600} = 7.37\,\mu F$$

10.7 प्रत्यावर्ती परिपथ में औसत शक्ति (Average Power in ac Circuit)

किसी विद्युत परिपथ में ऊर्जा व्यय की दर को परिपथ की शक्ति कहते हैं। इसका मान परिपथ में वोल्टता तथा धारा के गुणनफल के बराबर होता है। प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में सामान्यतः वोल्टता तथा धारा के मध्य कलांतर होता है, कलांतर का यह मान परिपथ में जुड़े अवयवों पर निर्भर करता है अतः प्रत्यावर्ती परिपथ में शक्ति का मान भी प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा धारा के मध्य कलांतर पर निर्भर करता है। माना किसी समय t पर प्रत्यावर्ती परिपथ में तात्क्षणिक वोल्टता तथा धारा के मान निम्न हैं

$$V = V_m \sin \omega t$$

$$I = I_m \sin(\omega t - \phi)$$

यहाँ ϕ धारा तथा वोल्टता के मध्य कलांतर है।

अतः परिपथ में तात्क्षणिक शक्ति

$$P = VI = V_m \sin \omega t \times I_m \sin(\omega t - \phi)$$

$$= V_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \phi) \qquad \ldots(10.42)$$

$$\left[\sin C \sin D = \frac{1}{2}\{\cos(C-D) - \cos(C+D)\}\text{ से}\right]$$

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m [\cos\phi - \cos(2\omega t - \phi)]$$

या $$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\phi - \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t - \phi) \ldots(10.43)$$

उपर्युक्त समीकरण से ज्ञात होता है कि तात्क्षणिक शक्ति दो भागों के कारण होती है। प्रथम भाग समय के साथ परिवर्तित नहीं होता जबकि दूसरा भाग समय के साथ आवर्ती रूप से परिवर्तित होता है। अतः परिपथ में तात्क्षणिक शक्ति का प्रति चक्र औसत मान ज्ञात करते हैं।

$$P_{av} = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\phi - \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t - \phi)$$

$$= \frac{1}{2}V_m I_m \cos\phi - \frac{1}{2}V_m I_m \times 0$$

$$[\because \cos(2\omega t - \phi) = 0]$$

अतः $$P_{av} = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\phi$$

या $$P_{av} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\phi = V_{rms} I_{rms} \cos\phi \qquad \ldots(10.44)$$

या $$P_{av} = P_{vir}\cos\phi \qquad \ldots(10.45)$$

यहाँ $V_{rms} I_{rms}$ के मान को आभासी शक्ति P_{vir} कहते हैं तथा $\cos\phi$ को शक्ति गुणांक कहते है।

10.8 शक्ति गुणांक (Power Factor)

प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में धारा तथा वोल्टता के मध्य कलान्तर की कोज्या अर्थात् $\cos\phi$ को शक्ति गुणांक कहते है। यह परिपथ में जुड़े अवयवों की प्रकृति पर निर्भर करता है। समीकरण (10.45) से

$$\cos\phi = \frac{P_{av}}{P_{vir}} = \frac{\text{औसत शक्ति}}{\text{आभासी शक्ति}}$$

अर्थात् प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में औसत शक्ति व आभासी शक्ति का अनुपात शक्ति गुणांक $(\cos\phi)$ के बराबर होता है।

शक्ति गुणांक मात्रकहीन राशि हैं इसका न्यूनतम मान 0 तथा अधिकतम मान 1 हो सकता है। यदि किसी परिपथ के लिए शक्ति गुणांक शून्य है। तब उस परिपथ में ऊर्जा हानि शून्य होती है।

श्रेणी L–C–R परिपथ में समीकरण (10.27) से

$$\tan\phi = \frac{X_L \sim X_C}{R}$$

अतः $$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L \sim X_C)^2}}$$

या $$\cos\phi = \frac{R}{Z} \qquad \ldots(10.46)$$

अतः L–C–R श्रेणी परिपथ में प्रतिरोध तथा प्रतिबाधा के अनुपात को शक्ति गुणांक कहते हैं।

विशेष स्थितियाँ

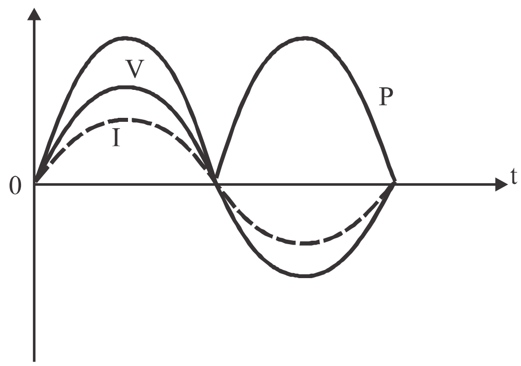
(i) शुद्ध प्रतिरोध परिपथ – ऐसे परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा धारा दोनों समान कला में होते हैं अतः $\phi = 0$

$\therefore \quad \cos\phi$ (शक्ति गुणांक) $= 1$

अतः परिपथ में औसत शक्ति (समीकरण 10.44 से)

$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} = P_{vir}$$

अर्थात् शुद्ध प्रतिरोध परिपथ में शक्ति गुणांक का मान अधिकतम और शक्ति व्यय भी अधिकतम होता है। इस परिपथ में औसत शक्ति एवं आभासी शक्ति बराबर होती हैं।



चित्र 10.40 प्रतिरोध में शक्ति आरेख

चित्र (10.40) में प्रतिरोध परिपथ में तात्क्षणिक V, I और P के वक्र प्रदर्शित किए गए है जिनसे ज्ञात होता है कि इस प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में शक्ति व्यय अधिकतम होता है।

(ii) शुद्ध प्रेरक परिपथ– ऐसे परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता की कला धारा की कला से $\pi/2$ आगे होती है अतः $\phi = \pi/2$

$\therefore$ शक्ति गुणांक $\cos\phi = 0$

समीकरण (10.44) से

$$P_{av} = 0$$

शुद्ध प्रेरक परिपथ में औसत शक्ति व्यय शून्य होता है। चित्र (10.14) से ज्ञात होता है कि शक्ति वाले वक्र में धनात्मक लूपों का क्षेत्रफल ऋणात्मक लूपों के क्षेत्रफल के तुल्य है।

(iii) शुद्ध धारितीय परिपथ–ऐसे परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता की कला धारा की कला से $\pi/2$ पीछे रहती है अतः $\phi = -\pi/2$

$\therefore$ शक्ति गुणांक $\cos\phi = 0$

समीकरण (10.44) से

$$P_{av} = 0$$

शुद्ध धारितीय परिपथ में भी औसत शक्ति व्यय शून्य होता है। चित्र (10.18) से ज्ञात होता है कि शक्ति वाले वक्र में धनात्मक और ऋणात्मक लूपों का क्षेत्रफल समान है।

(iv) L–C–R परिपथ– इस परिपथ में $\cos\phi = R/Z$

श्रेणी L–C–R अनुनादी परिपथ में $\phi = 0$ अर्थात् धारा और वोल्टता एक ही कला में होते हैं अतः $\cos\phi = 1$

अर्थात् अनुनादी अवस्था में परिपथ का शक्ति गुणांक अधिकतम होता है।

विद्युत पंखे की मोटर में तारों के कई फेरो के कारण इसका स्वप्रेरकत्व L बहुत बढ़ जाता है जिससे ϕ का मान बढ़ जाता है एवं शक्ति गुणांक बहुत कम हो जाता हैं इस कला कोण को कम करने के लिए संधारित्र का उपयोग किया जाता है। ऐसा करने पर कुल कला कोण घटकर लगभग शून्य तथा शक्ति गुणांक बढकर लगभग 1 हो जाता है जिसके कारण पंखे की मोटर को पूर्ण शक्ति मिलती है अर्थात् यह तेज चलता है। यही कारण है कि कई बार घरों में पंखा धीमा चलने पर अक्सर इसका संधारित्र बदला जाता है।

10.9 वाटहीन धारा (Wattless Current)

प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में प्रेरकत्व या धारिता या दोनों हैं परन्तु प्रतिरोध शून्य है तो धारा और वोल्टता में कलांतर $\pi/2$ होता है। अतः परिपथ में औसत शक्ति क्षय समीकरण से

$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

अर्थात् इस स्थिति में परिपथ में धारा प्रवाहित तो होती है परन्तु औसत शक्ति क्षय शून्य होता है अर्थात् परिपथ में ऊर्जा क्षय नहीं होता। अतः इस धारा को वाटहीन या कार्यहीन धारा कहते हैं।

अतः कार्यहीन धारा प्रत्यातर्वी धारा का वह घटक है जिसका कार्य में अर्थात् शक्ति व्यय में कोई योगदान नहीं होता।

अनुच्छेद 10.7 के समीकरण से

तात्क्षणिक शक्ति $P = V_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t - \phi)$

या $\quad P = V_m I_m \sin\omega t(\sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi)$

या $\quad P = V_m I_m \sin^2\omega t\cos\phi - V_m I_m \sin\phi\sin\omega t\cos\omega t$

या $\quad P = V_m I_m \cos\phi\sin^2\omega t - \dfrac{V_m I_m}{2}\sin\phi\sin 2\omega t$

अतः $\quad P = P_1 - P_2$

परिपथ में तात्क्षणिक शक्ति का प्रति चक्र औसत मान ज्ञात करने पर

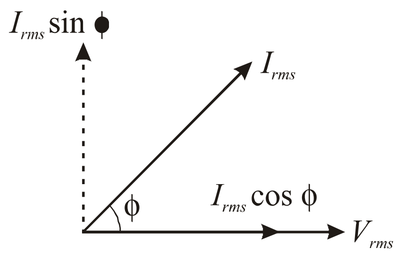
$$P_1 = V_m(I_m\cos\phi)\sin^2\omega t \qquad \ldots(10.47)$$

$$= \frac{V_m(I_m\cos\phi)}{2} \qquad (\because \sin^2\omega t = \frac{1}{2})$$

इसी प्रकार $P_2 = \dfrac{V_m(I_m\sin\phi)}{2}\sin 2\omega t \qquad \ldots(10.48)$

$$P_2 = 0 \quad (\because \sin 2\omega t = 0)$$

उपर्युक्त गणना से स्पष्ट है कि यदि प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में प्रतिघात घटक X के साथ प्रतिरोध R संयोजित हो तो परिपथ में प्रवाहित धारा को दो घटकों में वियोजित किया जा सकता है। चित्र 10.41 तथा समीकरण 10.47 के अनुसार धारा का एक घटक $I_{rms}\cos\phi = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\phi$ वोल्टता के साथ समान कला में होता है इसे धारा का कार्यकारी घटक कहते हैं।



चित्र 10.41 वोल्टता तथा धारा में कलांतर

इसी प्रकार धारा का दूसरा घटक समीकरण 10.48 तथा चित्र 10.41 के अनुसार $I_m \sin\phi$ वोल्टता के साथ 90^o के कलांतर पर होता है इसे धारा का कार्यहीन घटक कहते हैं। इस घटक का शक्ति व्यय में कोई योगदान नहीं है अतः $I_{rms}\sin\phi$ को वाटहीन धारा कहते है।

उदाहरण 10.29 प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में 200 V तथा 50 Hz आवृत्ति को स्त्रोत जुड़ा है। परिपथ में प्रतिरोध 10 Ω तथा प्रतिबाधा 14.14 Ω है तो (i) शक्ति गुणांक (ii) आभासी शक्ति (iii) औसत शक्ति (iv) वाटहीन धारा का मान ज्ञात करो।

हलः दिया है $V_{rms} = 200\,\text{V},\ f = 50\ \text{Hz}, R = 10\ \Omega$

तथा $Z = 14.14\ \Omega$

(i) $\cos\phi = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{10}{14.14} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \phi = \dfrac{\pi}{4}$

(ii) आभासी शक्ति $P_{vir} = V_{rms} I_{rms}$

$= V_{rms} \times \dfrac{V_{rms}}{Z} = \dfrac{200\times 200}{14.14} = 2820\,\text{W}$

(iii) औसत शक्ति $P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos\phi$

$= 2820 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2000\,\text{W}$

(iv) वाटहीन धारा $= I_{rms}\sin\phi = \dfrac{V_{rms}}{Z} \times \sin\phi$

$= \dfrac{200}{14.14} \times \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{200}{14.14} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 10\,\text{A}$

उदाहरण 10.30 एक प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में वोल्टता तथा धारा के मान निम्न हैं

$V = 100 \sin\omega t\ \text{V}$

$I = \sin(\omega t + \dfrac{\pi}{3})\ \text{A}$

ज्ञात करो– (i) शक्ति गुणांक (ii) औसत शक्ति (iii) वाटहीन धारा

हलः दिया है– $V_m = 100\,\text{V}, I_m = 1\,\text{A},\ \phi = \dfrac{\pi}{3}$

(i) शक्ति गुणांक $= \cos\phi = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

(ii) औसत शक्ति $= V_{rms} I_{rms} \cos\phi = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}} \times \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} \cos\phi$

$= \dfrac{100}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{2} = 25\,\text{W}$

(iii) वाटहीन धारा $= I_{rms}\sin\phi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sin\frac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$= 0.61\ \text{A}$

10.10 चोक कुंडली (Choke Coil)

एक ऐसी कुंडली जिसका स्वप्रेरकत्व L अधिक तथा प्रतिरोध R अल्प हों चोक कुंडली कहलाती है। यह विद्युतरूद्ध तांबे के तार को एक पटलित लोह क्रोड के ऊपर लपेट कर बनाई जाती है। उच्च प्रेरकत्व के कारण यहाँ $\phi = 90^o$ एवं $\cos\phi = 0$ अतः चोक कुंडली में शक्ति व्यय नगण्य होता है। साथ ही L के उच्च होने के कारण इसका प्रतिघात $X_L = \omega L$ अधिक होता है। अतः चोक कुंडली किसी प्रत्यावर्ती परिपथ में धारा के मान को कम रखने में उपयोग ली जाती है। इसका उपयोग ट्यूब लाइट, पारद लैम्प इत्यादि में किया जाता है। यदि चोक कुंडली के स्थान पर प्रतिरोधक का उपयोग धारा नियंत्रण के लिए किया जाता तो प्रतिरोध में विद्युत ऊर्जा की हानि होती। चोक कुंडली में शक्तिहीन धारा का मान अधिक होता है। इसके उपयोग से V तथा I में कलान्तर ϕ का मान बढ़ जाता है।

धातु संसूचक–यह प्रत्यावर्ती परिपथों में अनुनाद के सिद्धान्त पर कार्य करता है। जब कोई व्यक्ति धातु संसूचक से गुजरता है तो वह अनेक फेरों वाली कुण्डली जो समस्वरित संधारित्र से जुड़ी है, उससे गुजरता है जिसके कारण परिपथ अनुनाद की स्थिति में होता है। जब कोई धातु की वस्तु इसमें से गुजरती है तो परिपथ की प्रतिबाधा प्रभावित होने से प्रवाहित धारा में परिवर्तन होता है जिससे धारा का परिवर्तन संसूचित होता है और इलेक्ट्रॉनिक परिपथ के कारण बीप की ध्वनि सुनाई देती है।

10.11 ट्रांसफार्मर (Transformer)

एक ऐसी विद्युत युक्ति जिसकी सहायता से प्रत्यावर्ती धारा की वोल्टता को परिवर्तित किया जाता है। यह अन्योन्य प्रेरण के सिद्धान्त पर कार्य करता है, इसे ट्रांसफार्मर कहते हैं।

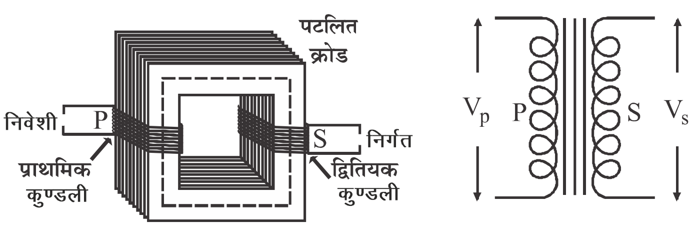
10.11.1 रचना (Construction)

इसमें चित्र 10.42 के अनुसार आयताकार या अन्य आकार के नर्म लोहे का पटलित क्रोड होता है जो नर्म लोहे की पत्तियों को एक के ऊपर एक रखकर बनाया जाता है। इन पत्तियों के मध्य कोई विद्युतरोधी पदार्थ (जैसे लैकर) होता है। इस पटलित क्रोड पर दो कुण्डलियाँ लपेटी गई हैं, ये विद्युत रूद्ध तांबे के तारों की बनी होती हैं।

जिस कुण्डली में प्रत्यावर्ती धारा तथा वोल्टता को निवेशित किया जाता है उसे प्राथमिक कुण्डली (primary coil) P तथा जिस कुण्डली में प्रत्यावर्ती धारा या वोल्टता प्राप्त की जाती है, उसे द्वितीयक कुण्डली (secondary coil) S कहते हैं।

11.11.2 सिद्धान्त तथा कार्यविधि (Principle and Working)

जब प्राथमिक कुण्डली में प्रत्यावर्ती धारा प्रवाहित की जाती है तो प्राथमिक कुण्डली से उत्पन्न चुम्बकीय फ्लक्स क्रोड द्वारा द्वितीयक कुण्डली से सम्बद्ध होता है। नर्म लोहे के कारण चुम्बकीय क्षेत्र रेखाएँ क्रोड में सीमित रहती हैं जिससे चुम्बकीय फ्लक्स का वायु में क्षरण बहुत कम होता है। प्राथमिक कुण्डली में प्रत्यावर्ती धारा के मान में निरंतर परिवर्तन होने से द्वितीयक कुण्डली से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स के मान में भी लगातार परिवर्तन होता है जिससे फैराडे के नियमानुसार द्वितीयक कुण्डली में प्रेरित वि.वा.बल (वोल्टता) उत्पन्न होती है इसकी आवृत्ति प्राथमिक कुण्डली में प्रवाहित प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति के बराबर होती है।



चित्र 10.42 ट्रांसफार्मर

माना प्राथमिक कुण्डली में फेरों की संख्या N_P और द्वितीयक कुण्डली में N_S है। प्राथमिक कुण्डली के सिरों के मध्य वोल्टता V_P लगाने पर माना किसी क्षण t पर इस कुण्डली का प्रत्येक फेरा क्रोड में चुम्बकीय फ्लक्स ϕ उत्पन्न करता है तो N_S घेरों वाली द्वितीयक कुण्डली के सिरों के मध्य उत्पन्न प्रेरित वि.वा.बल या वोल्टता

$$E_S = -N_S \frac{d\phi}{dt} \qquad \ldots(10.49)$$

प्रत्यावर्ती फ्लक्स ϕ प्राथमिक कुण्डली में भी वि.वा.बल प्रेरित करता है जिसे पश्च वि.वा.बल कहते हैं

$$E_P = -N_P \frac{d\phi}{dt} \qquad \ldots(10.50)$$

$\because$ $E_P = V_P$ तथा $E_S = V_S$ (जब द्वितीयक कुण्डली के सिरे मुक्त हो या इससे बहुत कम धारा ली जा रही हो) तो

$$E_P = V_P = -N_P \frac{d\phi}{dt} \qquad \ldots(10.51)$$

तथा

$$E_S = V_S = -N_S \frac{d\phi}{dt} \qquad \ldots(10.52)$$

अतः समीकरण (10.51) और (10.52) से

$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{N_S}{N_P} \qquad \ldots(10.53)$$

यदि यह मान लिया जाय कि ट्रांसफार्मर में किसी प्रकार की ऊर्जा क्षति नहीं हो रही है तो प्राथमिक कुण्डली में निवेशी शक्ति, द्वितीयक कुण्डली से निर्गत शक्ति के बराबर होगी।

$$I_P V_P = I_S V_S \qquad \ldots(10.54)$$

अतः समीकरण (10.53) और (10.54) से

$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{N_S}{N_P} = \frac{I_P}{I_S} \qquad \ldots(10.55)$$

अर्थात् द्वितीयक कुण्डली से प्राप्त प्रत्यावर्ती वोल्टता तथा प्राथमिक कुण्डली में लगाए गए प्रत्यावर्ती वोल्टता का अनुपात दोनों कुण्डलियों में फेरों की संख्या के अनुपात के बराबर तथा द्वितीयक और प्राथमिक कुण्डली में प्रवाहित धाराओं का अनुपात उनकी वोल्टताओं के अनुपात का व्युत्क्रम होता है।

10.11.3 ट्रांसफार्मर के प्रकार (Type of Transperners)

(i) उच्चायी ट्रांसफार्मर (Step up Transformer)

जब द्वितीयक कुण्डली में फेरों की संख्या N_S प्राथमिक कुण्डली में फेरों की संख्या N_P से अधिक होती है तो निर्गत वि. वा.बल या वोल्टता V_S का मान निवेशी वोल्टता V_P से अधिक होता है। अतः द्वितीयक कुण्डली में धारा का मान I_S प्राथमिक कुण्डली में धारा I_P से कम हो जाता है, इस प्रकार के ट्रांसफार्मर को उच्चायी ट्रांसफार्मर कहते हैं।

अर्थात् जब $N_S > N_P$ तो $V_S > V_P$ और $I_S < I_P$

(ii) अपचायी ट्रांसफार्मर (Step in Transformer)

जब द्वितीयक कुण्डली में फेरों की संख्या N_S प्राथमिक कुण्डली में फेरों की संख्या N_P से कम होती है तो निर्गत वोल्टता V_S का मान निवेशी वोल्टता V_P के मान से कम होता है। अतः द्वितीयक कुण्डली में धारा का मान I_S प्राथमिक कुण्डली में धारा I_P से अधिक हो जाता है, इस प्रकार के ट्रांसफार्मर को अपचायी ट्रांसफार्मर कहते हैं।

अर्थात् जब $N_S < N_P$ तो $V_S < V_P$ और $I_S > I_P$ एक आदर्श ट्रांसफार्मर में ट्रांसफार्मर की प्राथमिक कुण्डली से द्वितीयक

कुण्डली में ऊर्जा के हस्तान्तरण में ऊर्जा की कोई हानि नहीं होती तो प्राथमिक कुण्डली तथा द्वितीयक कुण्डली में शक्ति का मान भी समान होता है। ऐसे ट्रांसफार्मर की दक्षता 100% होती है। ट्रांसफार्मर की दक्षता

$$= \frac{\text{द्वितीयक कुण्डली के सिरों पर प्राप्त शक्ति}}{\text{प्राथमिक कुण्डली में निवेशित शक्ति}} \times 100\%$$

व्यावहारिक रूप में ट्रांसफार्मर में ऊर्जा की किसी न किसी रूप में क्षति होने से उसकी दक्षता शत प्रतिशत नहीं हो सकती। ट्रांसफार्मर में ऊर्जा की हानि निम्न प्रकार से हो सकती है

(i) ताम्र हानि (Copper Losses)

ट्रांसफार्मर की प्राथमिक और द्वितीयक कुण्डलियाँ तांबे के तार की बनाई जाती है, इनका प्रतिरोध अल्प होता है परन्तु शून्य नहीं होता। अतः जूल प्रभाव से I^2R के बराबर शक्ति का क्षय होता है। इसे ताम्र हानि कहते हैं। इसे कम करने के लिए तांबे के मोटे तार की कुण्डली लेते हैं।

(ii) चुम्बकीय फ्लक्स क्षरण के कारण हानि (Losses due to Magnetic Flux Leakage)

ट्रांसफार्मर में क्रोड के खराब अभिकल्पन या इसमें रही वायु रिक्ति के कारण प्राथमिक कुण्डली का समस्त चुम्बकीय फ्लक्स द्वितीयक कुण्डली से नहीं गुजरता है। अतः प्राथमिक तथा द्वितीयक कुण्डलियों को एक दूसरे के ऊपर लपेट कर फ्लक्स क्षरण को कम किया जाता है।

(iii) भंवर धारा हानि (Eddy Current Losses)

प्रत्यावर्ती धाराओं के कारण जब विद्युत फ्लक्स में आवर्ती परिवर्तन होता है तो क्रोड में भी वोल्टता प्रेरित होने से भंवर धाराएँ प्रवाहित होती हैं। इन भंवर धाराओं के कारण क्रोड में उष्मा के रूप में शक्ति का क्षय होता है। इस प्रभाव को कम करने के लिए क्रोड को पटलित किया जाता है।

(iv) शैथिल्य हानि (Hysteresis Losses)

प्रत्यावर्ती चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा क्रोड का चुम्बकन बार–बार उत्क्रमित होता है। चुम्बकन के प्रत्येक पूर्ण चक्र में चुम्बकन की आरोपित क्षेत्र के सापेक्ष पश्चता शैथिल्यता कहलाती है। शैथिल्य पाश का क्षेत्रफल प्रति चक्र प्रति एकांक आयतन शैथिल्य से ऊर्जा की हानि के समानुपाती होता है। इससे क्रोड में ऊष्मा के रूप में ऊर्जा की हानि होती है। इस क्षय को कम करने के लिए नर्म लोहे का क्रोड लेते हैं जिनके शैथिल्य पाश का क्षेत्रफल न्यून होता है।

ट्रांसफार्मरों का उपयोग विद्युत शक्ति वितरण में, प्रतिबाधा सुमेलन में किया जाता है। श्रव्य आवृत्ति ट्रांसफार्मरों का उपयोग टेलीफोन, रेडियों टेलीफोन में तथा रेडियों आवृत्ति ट्रांसफार्मरों का उपयोग रेडियों संचार में किया जाता है। दूरस्थ स्थानों तक विद्युत शक्ति के संचरण के लिए अधिक वोल्टता पर कम मान की धारा प्रयुक्त करते हैं एवं उच्चायी ट्रान्सफॉर्मर का उपयोग करते है जिससे विद्युत शक्ति का ऊष्मा के रूप में क्षय (I^2R) न्यूनतम होता है। यह उदाहरण 10.32 से स्पष्ट है।

उदाहरण 10.31 एक ट्रांसफार्मर की प्राथमिक कुण्डली में 1 A की धारा प्रवाहित हो रही है। परिपथ की निवेशी शक्ति 4 kW तथा द्वितीयक कुण्डली में उत्पन्न वोल्टता 400 V होता है। यदि प्राथमिक कुण्डली में फेरों की संख्या 100 हो तो द्वितीयक कुण्डली में फेरों की संख्या ज्ञात करो।

हल: $P_{in} = V_P I_P$

दिया है $I_P = 1$ A, $P_{in} = 4000$ W, $V_S = 400$ V

$N_P = 100$

$$V_P = \frac{P_{in}}{I_P} = \frac{4000}{1} = 4000\ V$$

$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{N_S}{N_P}$$

$$N_S = \frac{400}{4000} \times 100 = 10$$

उदाहरण 10.32 एक विद्युत लाइन का प्रतिरोध 20 Ω है तथा विद्युत शक्ति 6.6 kW है। यदि विद्युत को 22000 V तथा 220 V पर संचरित किया जाए तो दोनों स्थितियों में शक्ति में हानि तथा वोल्टता पतन ज्ञात करो। इससे क्या निष्कर्ष निकलता है?

हल: प्रथम स्थिति में $P = VI$

$$I = \frac{P}{V}$$

दिया है $P = 6.6\,\text{KW}, R = 20\,\Omega,$

$$V_1 = 22000\ \text{V},\ V_2 = 220\ \text{V}$$

$$I = \frac{6600}{22000} = 0.3\,\text{A}$$

ऊष्मा के रूप में शक्ति की हानि

$$I^2R = (0.3)^2 \times 20 = 1.8\,\text{W}$$

तार पर वोल्टता पतन $= IR = 0.3 \times 20 = 6$ V

द्वितीयक स्थिति में

$$I = \frac{6600}{220} = 30\,\text{A}$$

उष्मा के रूप में शक्ति की हानि

$$I^2R = (30)^2 \times 20 = 1800\,\text{W}$$

तार पर वोल्टता पतन

$$= IR = 30 \times 20 = 600\,\text{V}$$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि जब वोल्टता कम होती है तो शक्ति हानि अधिक होती है अतः उच्च वोल्टता पर विद्युत का संचरण किया जाता है।

महत्वपूर्ण बिन्दु (Important Points)

1. ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती वोल्टता या धारा को निम्न समीकरणों द्वारा व्यक्त करते हैं

$$V = V_m \sin \omega t$$

$$I = I_m \sin \omega t$$

2. प्रत्यावर्ती धारा का एक सम्पूर्ण चक्र के लिए औसत मान शून्य होता है तथा धनात्मक और ऋणात्मक अर्द्ध चक्र के लिए औसत मान

$$I_{av} = \pm \frac{2I_m}{\pi} = \pm 0.637\, I_m$$

3. जब प्रत्यावर्ती धारा या वोल्टता का कोई मान दिया जाता है तो वह I_{rms} (वर्ग माध्य मूल) मान होता है इसे प्रभावी या आभासी मान भी कहते है।

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707\, I_m$$

4. प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में प्रेरक (L) द्वारा उत्पन्न अवरोध को प्रेरणिक प्रतिघात (X_L) तथा संधारित्र (C) द्वारा उत्पन्न अवरोध को धारितीय प्रतिघात (X_C) कहते हैं

$$X_L = L\omega = L \times 2\pi f$$

$$X_C = \frac{1}{c\omega} = \frac{1}{c \times 2\pi f}$$

5. प्रत्यावर्ती R–L, R–C, L–C–R श्रेणी परिपथ में उत्पन्न अवरोध को प्रतिबाधा (Z) कहते हैं।

R–L परिपथ में $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$

R–C परिपथ में $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

L–C–R परिपथ में $Z = \sqrt{R^2 + (X_L \sim X_C)^2}$

6. कला कोण ϕ – प्रत्यावर्ती धारा परिपथों में वोल्टता तथा धारा के मध्य कला कोण में अंतर निम्न होता है–

शुद्ध R परिपथ	$\tan\phi = 0,$	$\phi = 0$
शुद्ध L परिपथ	$\tan\phi = \infty,$	$\phi = \pi/2$
शुद्ध C परिपथ	$\tan\phi = -\infty$	$\phi = -\pi/2$

R–L परिपथ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right)$

R–C परिपथ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right)$

L–C–R परिपथ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$

7. अनुनादी L–C–R परिपथ में

$X_L = X_C$ $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$Z_{min} = R \qquad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\phi = 0$$

$$(\cos\phi)_{max} = 1$$

8. अनुनादी आवृत्ति के दोनों ओर वे आवृत्तियाँ जिन पर धारा का मान घटकर अधिकतम धारा के मान का $\frac{1}{\sqrt{2}}$ गुना हो जाता है, उन्हें अर्द्ध शक्ति बिन्दु या आवृत्तियाँ कहते हैं

9. अर्द्ध शक्ति बिन्दु या आवृत्तियों के अंतर को बैण्ड चौड़ाई कहते है।

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \text{ या } \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}$$

$$f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}$$

10. प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में अनुनादी आवृत्ति एवं बैण्ड चौड़ाई के अनुपात को परिपथ का विशेषता गुणांक (Q) कहते हैं।

$$Q = \frac{fr}{f_2 - f_1} = \frac{L\omega_r}{R}$$

11. प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में औसत शक्ति

$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos\phi$$

शुद्ध R परिपथ में $P_{av} = V_{rms} I_{rms}$

शुद्ध L या C परिपथ में $P_{av} = 0$

12. शक्ति गुणांक $\cos\phi = \frac{P_{av}}{P\text{आभासी}} = \frac{R}{Z}$

शुद्ध R परिपथ में $\cos\phi = 1$

शुद्ध L या C परिपथ में $\cos\phi = 0$

13. प्रत्यावर्ती धारा का वह घटक $I_m \sin\phi$ जिसके कारण शक्ति क्षय या ऊर्जा हानि नहीं होती है, उसे कार्यहीन या वाटहीन धारा कहते है।

14. ट्रांसफार्मर अन्योन्य प्रेरण के सिद्धान्त पर कार्य करता है तथा इसकी सहायता से प्रत्यावर्ती वोल्टता को बदला जा सकता है।

ट्रांसफार्मर में $\frac{N_S}{N_P} = \frac{V_S}{V_P} = \frac{I_P}{I_S}$

15. ट्रांसफार्मर उच्चायी तथा अपचायी प्रकार के होते हैं। उच्चायी में $N_S > N_P$

अपचायी में $N_S < N_P$

16. ट्रांसफार्मर में प्रतिरोध, भंवर धारा, शैथिल्य, फ्लक्स क्षरण के कारण ऊर्जा की हानि होती है।

अभ्यासार्थ प्रश्न

बहुचयनात्मक प्रश्न

1. प्रत्यावर्ती धारा के वर्ग माध्य मूल का मान होता है–
(अ) शिखर मान का दुगुना
(ब) शिखर मान का आधा
(स) शिखर मान के बराबर
(द) शिखर मान का $\frac{1}{\sqrt{2}}$ गुना

2. प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में निम्न में से किसके लगे होने पर धारा, वोल्टता से कला में आगे होगी–
(अ) शुद्ध प्रतिरोध (ब) शुद्ध प्रेरकत्व
(स) शुद्ध धारिता (द) कोई नहीं

3. प्रत्यावर्ती धारा की कला वोल्टता की कला से $\frac{\pi}{2}$ कोण से पीछे रहती है, जब परिपथ में
(अ) केवल प्रतिरोध हो (ब) केवल प्रेरकत्व हो
(स) केवल धारिता हो (द) धारिता और प्रतिरोध हो

4. $C\omega$ का मात्रक है–
(अ) ओम (ब) म्हो
(स) वोल्ट (द) एम्पीयर

5. परिपथ में संधारित्र –
(अ) प्रत्यावर्ती धारा को गुजरने देता है
(ब) प्रत्यावर्ती धारा को रोक देता है
(स) दिष्ट धारा को गुजरने देता है
(द) प्रत्यावर्ती धारा को रोकता है और दिष्ट धारा को गुजरने देता है

6. किसका मात्रक समान नहीं है–
(अ) $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (ब) $\sqrt{LC}$
(स) RC (द) $\frac{L}{R}$

7. एक प्रत्यावर्ती धारा परिपथ 10 kHz आवृत्ति पर अनुनादित होता है। यदि आवृत्ति बढ़ाकर 12 kHz कर दी जाए तो परिपथ की प्रतिबाधा पर क्या प्रभाव पड़ेगा–
(अ) अपरिवर्तित रहेगी
(ब) 1.2 गुना बढ़ जाएगी
(स) बढ़ जाएगी ओर धारितीय हो जाएगी
(द) बढ़ जाएगी और प्रेरणिक हो जाएगी

8. एक परिपथ में धारा की कला वोल्टता की कला से $\pi/3$ कोण पीछे है, परिपथ में अवयव है
(अ) R और C (ब) R और L
(स) L और C (द) केवल L

9. शुद्ध प्रेरकत्व या धारिता का शक्ति गुणांक का मान होता है
(अ) एक (ब) शून्य
(स) π (द) शून्य से अधिक

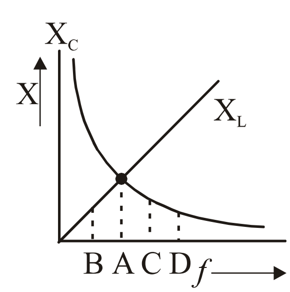
10. एक प्रत्यावर्ती परिपथ में शक्ति की हानि किए बिना धारा को कम कर सकता है–
(अ) शुद्ध प्रेरकत्व का प्रयोग कर
(ब) शुद्ध प्रतिरोध प्रयुक्त कर
(स) प्रतिरोध और प्रेरकत्व लगाकर
(द) प्रतिरोध तथा धारिता प्रयुक्त कर

11. धारा $I = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ प्रत्यावर्ती परिपथ में प्रवाहित हो रही है यदि प्रत्यावर्ती वोल्टता $V = V_m \sin\omega t$ हो तो व्यय होने वाली शक्ति है–
(अ) $\frac{V_m I_m}{R}$ (ब) $\frac{V_m I_m}{\sqrt{2}}$
(स) $\frac{VI}{2}$ (द) शून्य

12. श्रेणी LCR परिपथ में अनुनाद की स्थिति में यदि धारिता $C = 1$ PF तथा $L = 1$H हो तो आवृत्ति का मान कितने हर्ट्ज होगा
(अ) 10^6 (ब) $2\pi\times10^6$
(स) $\frac{10^6}{2\pi}$ (द) $2\pi\times10^{-6}$

13. ट्रांसफार्मर की क्रोड पलटित इसलिए होती है ताकि–
(अ) चुम्बकीय क्षेत्र बढ़ जाए
(ब) क्रोड में अवशेष चुम्बकत्व कम हो जाए
(स) क्रोड की चुम्बकीय संतृप्ति का मान बढ जाए
(द) भंवर धाराओं के कारण ऊर्जा हानि कम हो

14. संलग्न चित्र में अनुनादी स्थिति को प्रदर्शित करने वाला बिन्दु है



(अ) A
(ब) B
(स) C
(द) D

15. 100% दक्षता वाले ट्रांसफार्मर की प्राथमिक व द्वितीयक कुण्डलियों में प्रवाहित हो रही धारा का अनुपात 1 : 4 है तो प्राथमिक द्वितीयक कुण्डलियों पर वोल्टता का अनुपात है
(अ) 1 : 4 (ब) 4 : 1
(स) 1 : 2 (द) 2 : 1

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. एक प्रत्यावर्ती वोल्टता का समीकरण निम्न है $V = 200\sqrt{2}\sin 100\pi t$ इसका वर्ग माध्य मूल मान तथा आवृत्ति लिखो।
2. प्रत्यावर्ती धारा के वर्ग माध्य मूल तथा शिखर मान में संबंध लिखो।
3. किसी प्रत्यावर्ती धारा का समीकरण $I = I_m \sin \omega t$ है तो प्रेरकत्व परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता का समीकरण लिखो।
4. किसी प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में किसी समय वोल्टता $V = 200\sin 314t$ है तो प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति लिखो।
5. प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति बढ़ाने पर प्रेरणिक प्रतिघात तथा धारितीय प्रतिघात पर क्या प्रभाव पड़ता है?
6. एक कुण्डली का प्रेरकत्व 0.1 H है। 50 Hz आवृत्ति की प्रत्यावर्ती धारा के लिए इसके प्रतिघात का मान ज्ञात करो।
7. एक श्रेणी LCR परिपथ में धारा तथा वोल्टता के मध्य कलांतर कितना होगा?
8. श्रेणी LCR अनुनादी परिपथ में प्रेरकत्व तथा धारिता पर विभवांतर के मध्य कलांतर कितना होगा?
9. श्रेणी LCR अनुनादी परिपथ में प्रतिबाधा का मान कितना होता है?
10. प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में प्रेरकत्व, धारिता तथा प्रतिरोध के लिए शक्ति गुणांक का क्या मान होता है?
11. $\sqrt{LC}$ का मात्रक क्या होता है?
12. श्रेणी LCR परिपथ में धारिता को चार गुना करने पर समान अनुनादी आवृत्ति के लिए प्रेरकत्व का मान कितना करना होगा
13. वाटहीन धारा का वर्ग माध्य मूल मान कितना होगा?
14. एक ट्रांसफार्मर की प्राथमिक और द्वितीयक कुण्डली में घेरों की संख्या का अनुपात 1 : 4 है। यह कौनसा ट्रांसफार्मर हैं?
15. प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में वाटहीन धारा का मान लिखो।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

1. दिष्ट धारा की तुलना में प्रत्यावर्ती धारा को प्राथमिकता क्यों दी जाती है? समझाइए।
2. 220 V पर प्रत्यावर्ती धारा, 220 V पर दिष्ट धारा से अधिक घातक है। क्यों?
3. प्रेरणिक प्रतिघात तथा धारितीय प्रतिघात का आवृत्ति के साथ लेखाचित्र बनाइए।
4. संधारित्र दिष्ट धारा का मार्ग अवरूद्ध करता है, जबकि प्रत्यावर्ती धारा को जाने देता है क्यों?
5. एक कुण्डली का ओमीय प्रतिरोध 6 Ω है यदि कुण्डली की प्रतिबाधा 10 Ω हो तो X_L प्रेरणिक प्रतिघात ज्ञात करो।
6. किसी प्रत्यावर्ती परिपथ में धारा और विभवांतर के मध्य कला संबंध बताओ जब (i) $f = f_r$ (ii) $f < f_r$ (iii) $f > f_r$ यहाँ f_r अनुनादी आवृत्ति है।
7. बैण्ड चौड़ाई किसे कहते हैं? LCR परिपथ में इसका मान लिखो।
8. अर्द्ध शक्ति बिन्दु आवृत्तियाँ किसे कहते हैं? इन पर धारा का मान कितना होता हैं?
9. किसी कुण्डली के प्रतिरोध व प्रतिघात बराबर होने पर उसका शक्ति गुणांक कितना होगा?
10. विद्युत शक्ति संचरण में प्रयुक्त परिपथों के लिए शक्ति गुणांक कम होने का अर्थ है, अधिक शक्ति क्षय। समझाइए।
11. अनुनादी LCR परिपथ में प्रतिबाधा, आवृत्ति तथा शक्ति गुणांक का मान कितना होगा? व्यंजक लिखो।
12. ट्रांसफार्मर किस सिद्धांत पर कार्य करता है? इसका उपयोग लिखो।
13. प्रत्यावर्ती धारा के प्रथम अर्द्ध चक्र में औसत मान को ज्ञात करो।
14. ट्रांसफार्मर में ऊर्जा हानि किन–किन कारणों से होती हैं? इन्हें किस प्रकार कम किया जा सकता हैं?
15. श्रेणी R–L परिपथ में धारा और वोल्टता के मध्य कलांतर तथा प्रतिबाधा का व्यंजक ज्ञात करो।

निबन्धात्मक प्रश्न

1. एक प्रत्यावर्ती वोल्टता परिपथ में शुद्ध प्रेरकत्व लगा है। परिपथ में धारा का मान, कलांतर, प्रतिघात तथा औसत व्यय ऊर्जा दर ज्ञात करो। फेजर आरेख भी बनाओ।
2. एक प्रत्यावर्ती वोल्टता R–L परिपथ पर आरोपित है। परिपथ में प्रतिबाधा, धारा के व्यंजक निगमित कीजिए तथा फेजर आरेख बनाओ।
3. अनुनादी परिपथ से क्या तात्पर्य है? श्रेणी LCR अनुनादी परिपथ के लिए आवश्यक प्रतिबंध बताइए तथा अनुनादी आवृत्ति का व्यंजक स्थापित करो। इस परिपथ का कहाँ उपयोग होता है।
4. श्रेणी L–C–R परिपथ के लिए आवृत्ति एवं धारा के मध्य सम्बन्ध को ग्राफ द्वारा प्रदर्शित करो। अर्द्धशक्ति बिन्दु आवृत्तियों को दर्शाते हुए बैण्ड चौड़ाई के लिए आवश्यक सूत्र स्थापित करो।
5. प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में शक्ति का सूत्र स्थापित करो। प्रतिघात रहित एवं प्रतिरोध रहित परिपथ के लिए उपर्युक्त सूत्र में क्या परिवर्तन होता है? शक्ति गुणांक को भी परिभाषित कीजिए।

उत्तरमाला (बहुचयनात्मक प्रश्न)

1. (द) 2. (स) 3. (ब) 4. (ब) 5. (अ) 6.(अ)
7. (द) 8. (ब) 9. (ब) 10. (अ) 11. (द) 12. (स)
13. (द) 14. (अ) 15. (ब)

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. 200 V, 50 Hz (2) $I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

(3) $V = V_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

(4) $2\pi f = 314$ अतः $f = 50 Hz$

(5) प्रेरणिक प्रतिघात अधिक और धारितीय प्रतिघात कम

(6) 31.4 Ω

(7) 0 से $\pm\frac{\pi}{2}$ के मध्य

(8) 180^{o}

(9) प्रतिरोध के बराबर

(10) शून्य, शून्य और एक

(11) सेकण्ड

(12) $\frac{L}{4}$

(13) $\frac{I_m}{\sqrt{2}} \sin\phi$

(14) उच्चायी

(15) $I_{rms} \sin\phi$

आंकिक प्रश्न

1. किसी प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता $V = 50 \sin(157t + \phi)$ V है तो ज्ञात कीजिए
   (अ) प्रत्यावर्ती वोल्टता का वर्ग माध्य मूल मान
   (ब) प्रत्यावर्ती वोल्टता की आवृत्ति
   (35.35 V, 25 Hz)

2. किस समय t पर ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा का मान अपने शिखर मान का (i) आधा (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ गुना होगा?
   ($T/12$ s, $T/6$ s)

3. 10Ω का एक प्रतिरोध तथा 100 mH का एक प्रेरकत्व श्रेणी क्रम में एक प्रत्यावर्ती वोल्टता स्त्रोत $V = 100 \cos\omega t$ से जुड़े है। परिपथ में प्रवाहित धारा और वोल्टता के मध्य कलांतर ज्ञात करो। (ω=100)
   ($\pi/4$)

4. 1 kHz आवृत्ति की प्रत्यावर्ती धारा के लिए 100 mH के प्रेरकत्व का प्रतिघात ज्ञात करो। यदि स्त्रोत की वोल्टता 6.28 V हो तो प्रेरकत्व में धारा का मान ज्ञात करो।
   (X_L = 628 Ω, I = 0.01 A)

5. एक कुण्डली का प्रेरकत्व 1 हेनरी है। (i) किस आवृत्ति पर इसका प्रतिघात $3140\,\Omega$ होगा? (ii) एक संधारित्र की धारिता क्या होनी चाहिए कि उसी आवृत्ति पर उसका प्रतिघात उतना ही रहे?
   (500 Hz, 0.11 μF)

6. एक 120 μF का संधारित्र 50Hz के स्त्रोत से जुड़ा है। इसके धारितीय प्रतिघात का मान ज्ञात करो। यदि प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति 5 MHz मेगा हर्ट्ज कर दी जाए तो प्रतिघात में क्या परिवर्तन होगा?
   (26.54Ω, प्रतिघात कम होकर $2.654 \times 10^{-4}\,\Omega$)

7. एक कुण्डली का प्रतिरोध $R = 10\Omega$ तथा प्रेरकत्व L = 0.4 H है। इसे 6.5 V, $\frac{30}{\pi} Hz$ के प्रत्यावर्ती धारा स्त्रोत से जोड़ते हैं। परिपथ में औसत शक्ति व्यय ज्ञात करो।
   ($5/8W$)

8. एक 60 V तथा 10 W का बल्ब 100 V के प्रत्यावर्ती स्त्रोत से जुड़ा है। इसके श्रेणीक्रम में एक प्रेरक कुण्डली जुड़ी है। यदि बल्ब पूर्ण तीव्रता से प्रकाशित होता है तो कुण्डली के प्रेरकत्व का मान ज्ञात करो। ($f = 60Hz$)
   (1.28 H)

9. $V_{rms} = 120$ V तथा $f = 60$ Hz का एक प्रत्यावर्ती स्त्रोत $L = 200$ mH, $C = 40$ μF तथा $R = 20\,\Omega$ के श्रेणी परिपथ से जुड़ा है। निम्न राशियों के मान ज्ञात करो–
   (i) कुल प्रतिघात (ii) प्रतिबाधा (iii) शक्ति गुणांक
   (iv) औसत शक्ति
   ($X = 9\Omega, Z = 21.94\Omega,\ \cos\theta = 0.912$ P = 598.85 W)

10. एक प्रेरकत्व, संधारित्र और प्रतिरोध श्रेणीक्रम में जुड़े हैं। यदि L = 0.1 H, C = 20 F, $R = 10\Omega$ हो तो किस आवृत्ति पर परिपथ अनुनादित होगा?
   (112.6 Hz)

11. किसी LCR परिपथ में 10 mH का प्रेरकत्व 3 Ω का प्रतिरोध तथा 1 μF की धारिता श्रेणीक्रम में $15 \cos\omega t$ V के स्त्रोत से जुड़े हैं। अनुनादी आवृत्ति से 10% कम आवृत्ति पर धारा का शिखर मान ज्ञात करो।
   (0.704 A)

12. एक प्रेरकत्व $L = 200$ mH, $C = 500\ \mu F$, $R = 100\Omega$ श्रेणीक्रम में 100V के प्रत्यावर्ती स्त्रोत से जुड़े है। ज्ञात करो–

(i) वह आवृत्ति जिस पर परिपथ का शक्ति गुणांक 1 हो

(ii) इस आवृत्ति पर धारा का शिखर मान

(iii) विशेषता गुणांक

(15.9 Hz, 1.414 A, 0.2)

13. एक कुण्डली का शक्ति गुणांक 60 Hz आवृत्ति पर 0.707 है, यदि आवृत्ति 120 Hz हो जाए तो शक्ति गुणांक क्या होगा?

(0.44 T)

14. एक श्रेणी LCR परिपथ में प्रत्यावर्ती वोल्टता 230 V का स्त्रोत जुड़ा है। यदि $L = 5H$, $C = 80\ \mu F$, $R = 40\Omega$ है तो (i) अनुनादी आवृत्ति (ii) परिपथ की प्रतिबाधा और अनुनादी आवृत्ति पर धारा का शिखर मान (iii) परिपथ के तीनों अवयवों के सिरों पर वोल्टता के वर्ग माध्य मूल मान

(50 Hz, 40 Ω, 8.1 A, 230 V, 1437.5 V, 1437.5 V)

15. एक अपचायी ट्रांसफार्मर 2200 V को 220 V में परिवर्तित करता है। इसकी प्राथमिक कुण्डली में 5000 फेरे हैं। यदि ट्रांसफार्मर की दक्षता 80% तथा निर्गत शक्ति 8 KW है तो ज्ञात करो–

(i) N_S (ii) I_P (iii) I_S (iv) निवेशी शक्ति

(500, 4.54 A, 36.36 A,10KW)