14

त्रि–विमीय ज्यामिति
(Three Dimensional Geometry)

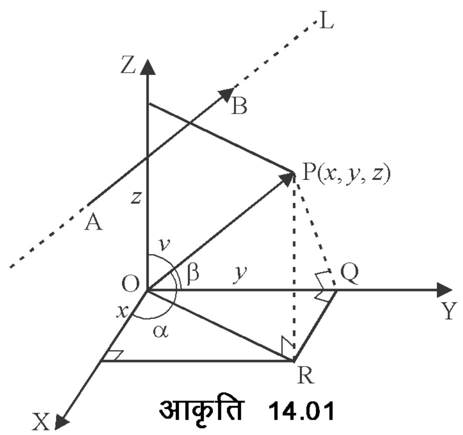
14.01 भूमिका (Introduction)

इस अध्याय में त्रिविम में दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोज्याएँ, दिक् अनुपात का अध्ययन करते हुए रेखा के समीकरण एवं उनके गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे। त्रिविम में रेखाओं और तलों के समीकरणों को सदिश एवं कार्तीय दोनों ही रूपों में प्रस्तुत करना सीखेंगे। दो रेखाओं, दो तलों व एक रेखा और एक तल के मध्य का कोण ज्ञात करना भी सीखेंगे। दो विषम तलीय रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी व एक तल की एक बिन्दु से दूरी के विषय में भी विचार विमर्श करेंगे।

14.02 एक रेखा की दिक्–कोज्याएँ (Direction cosines of a line)

किसी रेखा L की दिक् कोज्याओं से हमारा तात्पर्य उस सदिश $\overrightarrow{AB}$ की दिक् कोज्याओं से है जिसका आधार दी गई रेखा L है। माना $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{AB}$। यदि $\overrightarrow{OP}$, निर्देशांक अक्षों OX, OY तथा OZ की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः कोण α, β तथा γ कोण बनाये तो $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ को सदिश $\overrightarrow{OP}$ की दिक् कोज्याएँ कहते हैं। सदिश $\overrightarrow{OP}$ तथा $\overrightarrow{AB}$ की दिक् कोज्याएँ समान होगी क्योंकि ये सदिश समान्तर है तथा अक्षो के साथ समान कोण बनाते हैं। साधारणतः दिक् कोज्याओं को क्रमशः ℓ, m, n से व्यक्त करते है अर्थात्

$$\ell = \cos\alpha, m = \cos\beta, n = \cos\gamma .$$



आकृति 14.01

टिप्पणी: 1. दिक् कोज्याएँ कभी भी किसी कोष्टक में नहीं लिखी जाती है।

2. सदिश $\overrightarrow{BA}$ निर्देशांक अक्षों OX, OY तथा OZ के साथ क्रमशः कोण $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$ बनाता है अतः $\overrightarrow{BA}$ की दिक्- कोज्याएँ $\cos(\pi-\alpha), \cos(\pi-\beta), \cos(\pi-\gamma)$ अर्थात् $-\ell,\ -m,\ -n$ होंगी। अतः यदि $\ell,\ m,\ n$ किसी रेखा की दिक् कोज्याएँ है तो $-\ell,\ -m,\ -n$ भी उसी रेखा की दिक् कोज्याएँ होंगी, क्योकि $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{BA}$ की आधार रेखा L ही है।

2. x-अक्ष की दिक्-कोज्याएँ; 1, 0, 0
y-अक्ष की दिक्-कोज्याएँ; 0, 1, 0
z-अक्ष की दिक्-कोज्याएँ; 0, 0, 1

14.03 रेखा की दिक् कोज्याओं में संबंध (Relation among the direction cosines of a line)

आकृति 14.01 में माना सदिश $\overrightarrow{AB}$ की दिक् कोज्याएँ ℓ, m, n है जिसका आधार रेखा L है। माना $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{AB}$ तथा P के निर्देशांक (x, y, z) हैं बिन्दु P से Y अक्ष पर लंब PQ खीचिएं।

यदि $OP = r$, तो $\cos\beta = y - r$

$\Rightarrow$ $y = r\cos\beta = mr$ इसी प्रकार $z = nr$ तथा $x = \ell r$

पुनः $OP = r$

$\Rightarrow$ $(OP)^2 = r^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

$\Rightarrow$ $r^2\left(\ell^2 + m^2 + n^2\right) = r^2$

$\Rightarrow$ $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$

14.04 रेखा के दिक्–अनुपात (Direction ratios of a line)

एक रेखा के दिक् कोज्याओं के समानुपाती संख्याओं को रेखा के दिक् अनुपात कहते हैं। यदि एक रेखा के दिक् अनुपात a, b, c और दिक् कोज्याएँ ℓ, m, n हो, तो

$$\frac{\ell}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}$$

किसी रेखा के दिक् अनुपात वास्तव में उस सदिश के दिक् अनुपात होते है जिसका आधार वह रेखा है।

टिप्पणी:

1. यदि रेखा के दिक् अनुपात a, b, c है, तो $ka, kb, kc,\ k \neq 0$ भी दिक् अनुपातों का एक समूह है। अतः किसी एक रेखा के दिक् अनुपातों के असंख्य समूह हो सकते है।
2. किसी सदिश की दिक् कोज्याओं ℓ, m, n के लिए $\ell^2+m^2+n^2=1$ परन्तु दिक् अनुपात a, b, c के लिए $a^2+b^2+c^2 \neq 1$, जब तक की a, b, c स्वंय दिक् कोज्याएँ ही न हो जाएं।
3. $\frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}=k$ (माना)

   अतः $\ell=ak, m=bk, n=ck$

   परन्तु $\ell^2+m^2+n^2=1$

   $\Rightarrow \quad k^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=1$

   $\Rightarrow \quad k=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

   अतः $\ell=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ m=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ n=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

   अतः किसी रेखा के दिक् अनुपात ज्ञात हो, तो उसकी दिक् कोज्याएँ ज्ञात कर सकते है।
4. माना $\vec{r}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$

   अतः $\hat{r}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)i+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)j+\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)k$

   $=\ell\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k}$

   जहाँ $\ell=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ m=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ n=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

   अतः सदिश $\vec{r}$ में $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ के गुणांक उस सदिश के दिक् अनुपात होते है।

14.05 दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्–कोज्याएँ (Direction cosines of a line passing through two points)

माना दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ से जाने वाली रेखा L है।

अतः $\overrightarrow{PQ}=$ (Q का स्थिति सदिश) – (P का स्थिति सदिश)

$$=\left(x_2\hat{i}+y_2\hat{j}+z_2\hat{k}\right)-\left(x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}\right)$$

$$=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k$$

अतः $\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–अनुपात $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ होगें तथा इसकी दिक् कोज्याएँ

$$\frac{x_2 - x_1}{|\overrightarrow{PQ}|}, \frac{y_2 - y_1}{|\overrightarrow{PQ}|}, \frac{z_2 - z_1}{|\overrightarrow{PQ}|},$$

जहाँ $$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक रेखा X तथा Y–अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः 30° व 60° के कोण बनाती है। यह रेखा Z–अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ कितना कोण बनायेगी?

हल: माना रेखा, Z–अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ γ कोण बनाती है। इस प्रकार यह रेखा अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ 30°, 60° तथा γ कोण बनाती है।

$\therefore$ इस रेखा की दिक्–कोज्याएँ $\cos 30^\circ$, $\cos 60^\circ$ तथा $\cos\gamma$ अर्थात् $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ तथा $\cos\gamma$ है।

हम जानते हैं कि $$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$\therefore$ $$\left(\sqrt{3}/2\right)^2 + (1/2)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

या $$\cos^2\gamma = 1 - 1$$

$\Rightarrow$ $$\cos^2\gamma = 0$$

$\Rightarrow$ $$\cos\gamma = 0$$

या $$\gamma = 90^\circ$$

अतः यह रेखा Z–अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ 90° का कोण बनाती है अर्थात् यह रेखा XY समतल में स्थित है।

उदाहरण-2. यदि एक सदिश OX, OY तथा OZ अक्षों के साथ क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाता है तो सिद्ध कीजिए कि:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

हल: माना दिये सदिश की दिक् कोज्याएं ℓ, m, n हैं।

तब $\cos\alpha = \ell$, $\cos\beta = m$ तथा $\cos\gamma = n$

हम जानते हैं कि $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$

$\therefore$ $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$\Rightarrow$ $$\left(1 - \sin^2\alpha\right) + \left(1 - \sin^2\beta\right) + \left(1 - \sin^2\gamma\right) = 1$$

$\Rightarrow$ $$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

उदाहरण-3. बिन्दुओं $(1, 0, 0)$ तथा $(0, 1, 1)$ को जोड़ने वाली रेखा की दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल: $(1, 0, 0)$ तथा $(0, 1, 1)$ को जोड़ने वाली रेखाओं के दिक्–अनुपात हैं:

$$0 - 1, 1 - 0, 1 - 0 = -1, 1, 1$$

अतः दिक्–कोसाइन हैं:

$$\mp\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

उदाहरण-4. दर्शाइए कि बिन्दु A(2, 3, 4), B(–1, 2, –3) तथा C(–4, 1, –10) संरेख हैं।

हलः A तथा B को मिलाने वाली रेखा के दिक्–अनुपात हैं:

$-1-2,\ 2-3$ तथा $-3-4$

अर्थात् $-3, -1$ तथा -7

B तथा C को मिलाने वाली रेखा के दिक्–अनुपात हैं:

$-4+1,\ 1-2$ तथा $-10+3$

अर्थात् $-3, -1$ तथा -7

पूर्णतः स्पष्ट है कि AB तथा BC के दिक्–अनुपात समानुपाती है।

अतः AB || BC

परन्तु AB तथा BC में B उभयनिष्ठ है।

$\therefore$ A, B तथा C संरेख हैं।

उदाहरण-5. यदि एक रेखा X, Y और Z–अक्ष के साथ क्रमशः 90°, 135° तथा 45° के कोण बनाती है तो इस रेखा के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हलः दिक् कोण हैं : 90°, 135°, 45°

$\therefore$ दिक्–कोसाइन हैं:

$$\ell = \cos 90^o = 0,\ m = \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ n = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अतः दी रेखा के दिक्–कोसाइन हैं:

$$0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

प्रश्नमाला 14.1

1. एक रेखा के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशाक्षों के साथ समान कोण बनाती हैं।
2. दो बिन्दुओं (4, 2, 3) तथा (4, 5, 7) को मिलाने वाली सरल रेखा की दिक्–कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।
3. यदि एक रेखा के दिक्–अनुपात 2, –1, –2 हैं, तो इसकी दिक्-कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. एक सदिश $\vec{r}$, X, Y तथा Z–अक्षों के साथ क्रमशः 45°, 60°, 120° के कोण बनाता है। यदि सदिश $\vec{r}$ का परिमाण 2 इकाई है तो $\vec{r}$ ज्ञात कीजिए।

14.06 अंतरिक्ष में रेखा का समीकरण (Equation of a line in space)

एक रेखा अद्वितीयतः निर्धारित होती है, यदि

(i) यह दिए बिन्दु से दी गई दिशा से होकर जाती है, या

(ii) यह दो बिन्दुओं से होकर जाती है।

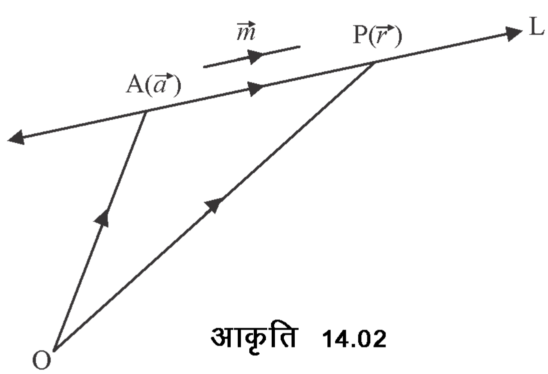
(i) दिए गए बिन्दु $A(\vec{a})$ से जोने वाली तथा दिए गए सदिश $\vec{m}$ के समान्तर रेखा का समीकरण (Equation of a line through a given point A$(\vec{a})$ and parallel to a given vector $\vec{m}$)

माना वह रेखा L है जिसका समीकरण ज्ञात करना है। माना यह रेखा सदिश $\vec{m}$ के समान्तर है और बिन्दु A से गुजरती है जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है। माना O मूल बिन्दु है। अतः $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

माना रेखा L पर एक स्वेच्छ बिन्दु P है जिसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ है,

तब $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

स्पष्टतः $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{m}$



आकृति 14.02

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{m}$

$\Rightarrow \quad$ (P का स्थिति सदिश) − (A का स्थिति सदिश) $= \lambda \vec{m}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda \vec{m}$

$\Rightarrow \quad \vec{r} - \vec{a} = \lambda \vec{m}$

$\Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{m}$

स्पष्टतः λ के प्रत्येक मान के लिए यह समीकरण रेखा के किसी बिन्दु की स्थिति प्रदान करता है।
अतः रेखा का सदिश समीकरण है

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{m} \qquad (1)$$

कार्तीय रूप (Cartesian form)

माना रेखा बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ से गुजरती है तथा इसके दिक् अनुपात a, b, c है। माना रेखा पर किसी बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) है। तब,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

चूंकि दी गई रेखा के दिक् अनुपात a, b, c है और यह सदिश $\vec{m}$ के समान्तर है, अतः $\vec{m} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$
अब, रेखा का सदिश समीकरण है

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{m}$$

$\Rightarrow \quad x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\right) + \lambda\left(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}\right)$

$\Rightarrow \quad x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (x_1 + \lambda a)i + (y_1 + \lambda b)j + (z_1 + \lambda c)$

$\Rightarrow \quad x = x_1 + \lambda a; \quad y = y_1 + \lambda b; \quad z = z_1 + \lambda c$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} = \lambda$

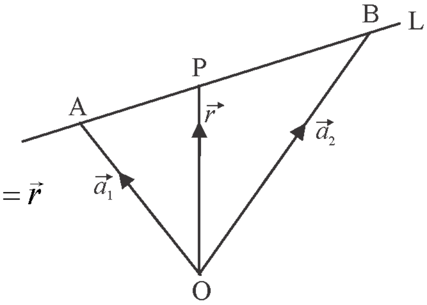
अतः रेखा जिसके दिक् अनुपात a, b, c है और जो $A(x_1, y_1, z_1)$ से गुजरती है, का समीकरण है

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

(ii) दो दिए गए बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण (Equation of a line passing through two given points)

सदिश रूप (Vector form)

माना वह रेखा L है जिसका समीकरण ज्ञात करना है। माना यह रेखा दो बिन्दुओं A तथा B से गुजरती है जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}_1$ तथा $\vec{a}_2$ है। यदि O मूल बिन्दु हो, तो $\overrightarrow{OA} = \vec{a}_1$ तथा $\overrightarrow{OB} = \vec{a}_2$



आकृति 14.03

$\therefore \quad \overrightarrow{AB} =$ (B का स्थिति सदिश) − (A का स्थिति सदिश)

$\qquad = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$

माना रेखा L पर एक स्वेच्छ बिन्दु P है जिसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ है, तब $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}_1$

चूंकि $\overrightarrow{AP}$ और $\overrightarrow{AB}$ संरेखीय सदिश है, अतः

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \lambda\left(\overrightarrow{AB}\right), \lambda \in R$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}-\vec{a}_1=\lambda\left(\vec{a}_2-\vec{a}_1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\left(\vec{a}_2-\vec{a}_1\right)$$

अतः रेखा L का सदिश समीकरण जो बिन्दु $A(\vec{a}_1)$ तथा $A(\vec{a}_2)$ से गुजरती है

$$\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\left(\vec{a}_2-\vec{a}_1\right) \tag{2}$$

कार्तीय रूप (Carte sian form)

माना रेखा L, दो बिन्दुओं $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ तथा $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$ से गुजरती है। माना रेखा पर किसी स्वेच्छ बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) है।

चूँकि $\overrightarrow{AP}$ और $\overrightarrow{AB}$ संरेखीय है, अतः

$$\Rightarrow \qquad \left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)-\left(x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}\right)=\lambda\left\{\left(x_2\hat{i}+y_2\hat{j}+z_2\hat{k}\right)-\left(x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(x-x_1\right)\hat{i}+\left(y-y_1\right)\hat{j}+\left(z-z_1\right)\hat{k}=\lambda\left(x_2-x_1\right)\hat{i}+\lambda\left(y_2-y_1\right)\hat{j}+\lambda\left(z_2-z_1\right)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \qquad x-x_1=\lambda\left(x_2-x_1\right);\ y-y_1=\lambda\left(y_2-y_1\right);\ z-z_1=\lambda\left(z_2-z_1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

जो कि दो दिए गए बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-6. बिन्दु (5, 2, –4) से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$ के समांतर रेखा का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

हलः हमें ज्ञात है, कि

$$\vec{a}=5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k} \text{ और } \vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$$

यदि रेखा पर स्थिति किसी स्वेच्छ बिन्दु $P(x,\ y,\ z)$ का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है तो अनुच्छेद 14.06 के (1) के अनुसार रेखा का सदिश समीकरण

$$x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=5\hat{i}+2\hat{j}-4k+\lambda\left(3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}\right)$$

$$=\left(5+3\lambda\right)\hat{i}+\left(2+2\lambda\right)\hat{j}+\left(-4-8\lambda\right)\hat{k}$$

तुलना करने पर $\quad \dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+4}{-8}=\lambda$

अतः अभीष्ट कार्तीय रूप में रेखा का समीकरण $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+4}{-8}$ है।

उदाहरण-7. बिन्दुओं (–1, 0, 2) और (3, 4, 6) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हलः मान लीजिए बिन्दुओं A(–1, 0, 2) और B (3, 4, 6) के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ व $\vec{b}$ हैं।

तब $\qquad \vec{a}=-\hat{i}+2\hat{k}$

और $\qquad \vec{b}=3\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$

इसलिए $\qquad \vec{b}-\vec{a}=4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$

मान लीजिए कि रेखा पर स्थित किसी स्वेच्छ बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है। अतः रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r}=-\hat{i}+2\hat{k}+\lambda\left(4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}\right)$$ [अनुच्छेद 14.06 के (2) से]

उदाहरण-8. उस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु A (2, –1, 1) से गुजरती है और जो बिन्दुओं B (–1, 4, 1) तथा C (1, 2, 2) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है। रेखा का कार्तीय समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

हलः दी गई रेखा का सदिश समीकरण के लिए

B का स्थिति सदिश $= -\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$

और C का स्थिति सदिश $= \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{BC} = C$ का स्थिति सदिश – B का स्थिति सदिश

$$= \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\right) - \left(-\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}\right) = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

A का स्थिति सदिश हैः $\vec{r_1} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ दी गई रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda(\vec{BC})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) + \lambda\left(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}\right) \qquad (1)$$

दी गई रेखा का कार्तीय समीकरण

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ लेने पर, (i) से,

$$\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = \left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) + \lambda\left(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = (2 + 2\lambda)\hat{i} + (-1 - 2\lambda)\hat{j} + (1 + \lambda)\hat{k}$$

तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1} = \lambda$$

अतः रेखा का कार्तीय रूप में वांछित समीकरण, $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ है।

उदाहरण-9. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $6x - 2 = 3y + 1 = 2z - 2$ है। (a) रेखा के दिक्–अनुपात, (b) उस रेखा का कार्तीय और सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो (2, –1, –1) से गुजरने वाली तथा दी गई रेखा के समान्तर हो।

हलः रेखा का समीकरण हैः

$$6x - 2 = 3y + 1 = 2z - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-(1/3)}{1/6} = \frac{y+(1/3)}{1/3} = \frac{z-1}{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-(1/3)}{1} = \frac{y+(1/3)}{2} = \frac{z-1}{3}$$

(a) अतः दी गई रेखा के दिक्–अनुपात 1, 2, 3 हैं।

(b) दी गई रेखा के समान्तर रेखा के दिक्–अनुपात 1, 2, 3 हैं।

$\therefore$ उस रेखा का कार्तीय समीकरण जो (2, –1, –1) से गुजरती है तथा दी गई रेखा के समान्तर है

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3}$$

बिन्दु A $(2, -1, -1)$ से गुजरने वाली और सदिश $\vec{m} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के समान्तर रेखा के समीकरण के लिए, A का स्थिति सदिश

$$\vec{r}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

$\therefore$ वांछित रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{m}$$

अर्थात् $$\vec{r} = \left(2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}\right) + \lambda\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right)$$

प्रश्नमाला 14.2

1. बिन्दु $(5, 7, 9)$ से गुजरने वाली उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो निम्न अक्षों के समान्तर हैः
   (i) X–अक्ष (ii) Y–अक्ष (iii) Z–अक्ष
2. सरल रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो एक बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $2i - 3j + 4k$ है, से गुजरती है, तथा सदिश $3i + 4j - 5k$ के समान्तर है। इसका कार्तीय रूप में रूपान्तरण भी ज्ञात कीजिए।
3. सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $2i - j + 3k$ के समान्तर है और बिन्दु $(5, -2, 4)$ से गुजरती है।
4. उस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2, -1, 1)$ से गुजरती है तथा रेखा $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z-2}{-3}$ के समान्तर है।
5. एक रेखा का कार्तीय समीकरण
   $$\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$$
   है तो रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।
6. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो $(1, 2, 3)$ से जाती है तथा $-\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{7} = \dfrac{2z-6}{3}$ के समान्तर है।
7. समानतर चतुर्भुज ABCD के तीन शीर्षों के निर्देशांक A $(4, 5, 10)$, B $(2, 3, 4)$ और C $(1, 2, -1)$ हैं। AB और BC के सदिश और कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए। D के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
8. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $3x + 1 = 6y - 2 = 1 - z$ है। वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहां से यह गुजरती है, साथ ही इसके दिक्–अनुपात तथा सदिश समीकरण भी ज्ञात कीजिए।
9. बिन्दु $(1, 2, 3)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $\left(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}\right)$ के समान्तर हैं।
10. बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ है, से गुजरने व सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।
11. एक रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-2, 4, -5)$ से जाती है और $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-4}{5} = \dfrac{z+8}{6}$ के समान्तर है।
12. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+4}{7} = \dfrac{z-6}{2}$ है, इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।
13. मूलबिन्दु और $(5, -2, 3)$ से जाने वाली रेखा का सदिश तथा कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।
14. बिन्दुओं $(3, -2, -5)$ और $(3, -2, 6)$ से गुजरने वाली रेखा का सदिश तथा कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

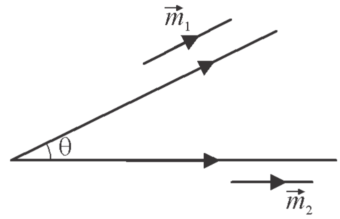
14.07 दो रेखाओं के मध्य कोण (Angle between two lines)

सदिश रूप:

माना दो रेखाओं के सदिश समीकरण निम्न है

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{m}_1,\ \lambda \in R \text{ तथा } \vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{m}_2,\ \mu \in R$$

यदि दोनों रेखाओं के मध्य कोण θ हो, तो आकृति 14.04 से स्पष्ट है कि सदिश $\vec{m}_1$ तथा सदिश $\vec{m}_2$ में मध्य कोण भी θ ही है। अतः $\cos\theta = \dfrac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{|\vec{m}_1||\vec{m}_2|}$



आकृति 14.04

कार्तीय रूप

माना दो रेखाओं के कार्तीय समीकरण निम्न है–

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \text{ तथा } \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$$

अतः $\vec{m}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ तथा $\vec{m}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$

परन्तु $\cos\theta = \dfrac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{|\vec{m}_1||\vec{m}_2|}$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

टिप्पणी:

1. यदि रेखाओं की दिक्–कोज्याएँ क्रमशः ℓ_1, m_1, n_1 तथा ℓ_2, m_2, n_2 हो और उनके मध्य कोण θ हो, तो $\cos\theta = \ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2$
2. यदि दोनों रेखाऐं लम्बवत् हो, तो $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ या $\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$
3. यदि दोनों रेखाएं समान्तर हो, तो $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ या $\dfrac{\ell_1}{\ell_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-10. रेखाओं $\dfrac{5-x}{3} = \dfrac{y+3}{-4}, \dfrac{z-7}{0}$ और $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z-6}{2}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई रेखाएँ

$$\frac{x-5}{-3} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-7}{0} \qquad (1)$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-6}{2} \qquad (2)$$

माना (1) और (2) के समान्तर सदिश क्रमशः $\vec{m}_1$ और $\vec{m}_2$ है, तब $\vec{m}_1 = -3\hat{i} - 4\hat{j} + 0k$ तथा $\vec{m}_2 = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ हैं। माना $\vec{m}_1$ और $\vec{m}_2$ के मध्य का कोण θ है, तब

$$\cos\theta = \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{|\vec{m}_1||\vec{m}_2|}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\{(-3)\times 1 + (-4)\times(-2) + 0\times 2\}}{\left\{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2}\right\}\left\{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\right\}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}(1/3).$$

उदाहरण-11. दी गई रेखाओं

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \quad \text{और} \quad \vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए

हल: रेखाओं के समीकरण से $\vec{b_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b_2} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

दोनों रेखाओं के मध्य कोण θ है, इसलिए

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})\cdot(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

अतः $\qquad \theta = \cos^{-1}(19/21)$

उदाहरण-12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-1, 3, -2)$ से गुजरती हो और निम्न रेखाओं पर लम्ब हो:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{ और } \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{5}$$

हल: माना वांछित रेखा के दिक्–अनुपात a, b, c हैं। चूंकि यह दी गई दो रेखाओं पर लम्ब है, अतः वज्रगुणन द्वारा

$$a + 2b + 3c = 0 \qquad (1)$$

और $\qquad -3a + 2b + 5c = 0 \qquad (2)$

(1) और (2) को वज्रगुणन द्वारा हल करने पर,

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{-14} = \frac{c}{8}$$

या $\qquad \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{-7} = \dfrac{c}{4} = k$ (माना)

अतः वांछित रेखा $(-1, 3, -2)$ से गुजरती है तथा इसके दिक्–अनुपात $2, -7, 4$ हैं। अतः इसका समीकरण है:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z+2}{4}$$

प्रश्नमाला 14.3

1. निम्नलिखित रेखाओं के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए:

$$\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}) \text{ और } \vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{j} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

2. निम्नलिखित रेखाओं के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \text{ और } \frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$$

3. दर्शाइए कि बिन्दुओं $(1, -1, 2), (3, 4, -2)$ से होकर जाने वाली रेखा बिंदुओं $(0, 3, 2)$ और $(3, 5, 6)$ से जाने वाली रेखा पर लंब है।

4. यदि रेखाएँ $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-2}{2k} = \dfrac{z-3}{2}$ और $\dfrac{x-1}{3k} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-6}{-5}$ परस्पर लंब हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

5. बिन्दु $(1, 2, -4)$ से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y+19}{-16} = \dfrac{z-10}{7}$ और $\dfrac{x-15}{3} = \dfrac{y-29}{8} = \dfrac{z-5}{-5}$ पर लंब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

6. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-2, 4, -5)$ से जाती है और $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-4}{5} = \dfrac{z+8}{6}$ के समांतर है।

14.08 दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन (Intersection of two lines)

अंतरिक्ष में यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती है, तो उनका एक उभयनिष्ठ बिन्दु अवश्य होगा और उनके मध्य की न्यूनतम दूरी शून्य होगी। इनका प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करने के लिए निम्न क्रिया विधियों का प्रयोग किया जा सकता है।

(1) सदिश रूप में रेखाओं के समीकरणः

माना दो रेखाएँ $\vec{r} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) + \lambda(m_1\hat{i} + m_2\hat{j} + m_3\hat{k})$ (i)

तथा $\vec{r} = (a'_1\hat{i} + a'_2\hat{j} + a'_3\hat{k}) + \mu(m'_1\hat{i} + m'_2\hat{j} + m'_3\hat{k})$ हैं। (ii)

(a) $\because$ रेखाएँ प्रतिच्छेद करती है अतः

$$(a_1 i + a_2 j + a_3 k) + \lambda(m_1\hat{i} + m_2\hat{j} + m_3\hat{k}) = \vec{r} = (a'_1\hat{i} + a'_2\hat{j} + a'_3\hat{k}) + \mu(m'_1\hat{i} + m'_2\hat{j} + m'_3\hat{k})$$

तुलना करने पर

$$a_1 + \lambda m_1 = a'_1 + \mu m'_1;\quad a_2 + \lambda m_2 = a'_2 + \mu m'_2;\quad a_3 + \lambda m_3 = a'_3 + \mu m'_3$$

(b) किन्ही दो समीकरणों को हल कर λ व μ के मान ज्ञात करते हैं। यदि ये मान तृतीय समीकरण को संतुष्ट करते हैं तो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती है अन्यथा नहीं।

(c) प्रतिच्छेद बिन्दु का स्थिति सदिश ज्ञात करने के लिए λ, μ के मान (i) या (ii) में रखे।

(2) कार्तीय रूप में रेखाओं के समीकरणः

माना रेखाएँ $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1} = r_1$ (माना) (i)

तथा $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2} = r_2$ (माना) है। (ii)

(a) (i) तथा (ii) पर व्यापक बिन्दु

$$(a_1 r_1 + x_1,\ b_1 r_1 + y_1,\ c_1 r_1 + z_1) \text{ तथा } (a_2 r_2 + x_2,\ b_2 r_2 + y_2,\ c_2 r_2 + z_2) \text{ लिखे।}$$

$\because$ रेखाएँ प्रतिच्छेद करती है, अतः उनके प्रतिच्छेद बिन्दु के लिए,

$$a_1 r_1 + x_1 = a_2 r_2 + x_2;\quad b_1 r_1 + y_1 = b_2 r_2 + y_2 \text{ तथा } c_1 r_1 + z_1 = c_2 r_2 + z_2$$

(b) किन्हीं दो समीकरण को सरल कर r_1 व r_2 का मान ज्ञात करें। यदि r_1 व r_2 के मान तृतीय समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं तो रेखाएं प्रतिच्छेद करती है अन्यथा नहीं।

(b) r_1 व r_2 का मान व्यापक बिन्दु में रखने पर प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक प्राप्त होंगे।

इन विधियों का अध्ययन निम्न दृष्टांतीय उदाहरणों की सहायता से किया जा सकता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-13. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+1}{7} \quad \text{और} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8}$$

प्रतिच्छेद करती है। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हलः रेखा $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z+1}{7} = r_1$ (माना)

पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(r_1 + 4, -4r_1 - 3, 7r_1 - 1)$ हैं। इसी प्रकार रेखा

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8} = r_2 \text{ (माना)}$$

पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(2r_2 + 1, -3r_2 - 1, 8r_2 - 10)$ हैं।

ये रेखाएं परस्पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद करेगी, यदि दोनों रेखाओं पर एक बिन्दु उभयनिष्ठ हो, जिसके लिए निम्न समीकरण संतुष्ट होने चाहिए। अर्थात्

$$r_1 + 4 = 2r_2 + 1 \qquad (1)$$

$$-4r_1 - 3 = -3r_2 - 1 \qquad (2)$$

$$7r_1 - 1 = 8r_2 - 10 \qquad (3)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर $r_1 = 1,\ r_2 = 2,$ जो स्पष्टतः समीकरण (3) को भी संतुष्ट करते हैं। अतः दोनों रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती है, तथा प्रतिच्छेदन बिन्दु के निर्देशांक (5, –7, 6) हैं।

उदाहरण-14. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ

$$\vec{r} = (i + j - k) + \lambda(3i - j) \text{ और } \vec{r} = (4i - k) + \mu(2i + 3k)$$

प्रतिच्छेद करती हैं। प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हलः यदि रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तो प्रतिच्छेद बिन्दु का स्थिति सदिश (माना $\vec{r}$) दोनों रेखाओं के समीकरणों को संतुष्ट करेगा। अतः दी गई रेखाओं के समीकरणों से

$$(i + j - k) + \lambda(3i - j) = (4i - k) + \mu(2i + 3k)$$

$$1 + 3\lambda = 4 + 2\mu \quad \Rightarrow \quad 3\lambda - 2\mu = 3 \qquad (1)$$

$$1 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \qquad (2)$$

$$-1 = -1 + 3\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = 0 \qquad (3)$$

(i, j, k गुणांकों की तुलना करने पर)

समीकरण (2) व (3) से $\lambda = 1,\ \mu = 0$ जो समीकरण (1) को भी संतुष्ट करते हैं, अतः दी गई रेखाएँ परस्पर काटती है। $\lambda = 1$ समीकरण $\vec{r} = (i + j - k) + \lambda(3i - j)$ में रखने पर प्रतिच्छेद बिन्दु का स्थिति सदिश होगा।

$$\vec{r} = 4i + 0j - k$$

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक (4, 0, –1) होंगे।

उदाहरण-15. दिखाइए कि रेखाएँ

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5} \quad \text{और} \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

एक–दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती हैं।

हलः दी गई रेखाएँ हैं:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5} = \lambda \qquad (1)$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2} = \mu \qquad (2)$$

$P(3\lambda+1,\ 2\lambda-1,\ 5\lambda+1)$, (1) पर कोई बिन्दु है तथा $Q(4\mu+2,\ 3\mu+1,\ -2\mu-1)$, (2) पर कोई बिन्दु है। यदि रेखाएँ (1) और (2) प्रतिच्छेद करती हैं, तब P और Q को λ तथा μ के कुछ मान के लिए अवश्य समाहित होना चाहिए।

अर्थात् $\quad 3\lambda + 1 = 4\mu + 2 \quad ; \quad 2\lambda - 1 = 3\mu + 1 \quad ; \quad 5\lambda + 1 = -2\mu - 1$

$$\Leftrightarrow \quad 3\lambda - 4\mu = 1 \qquad (3)$$

$$2\lambda - 3\mu = 2 \qquad (4)$$

$$5\lambda + 2\mu = -2 \qquad (5)$$

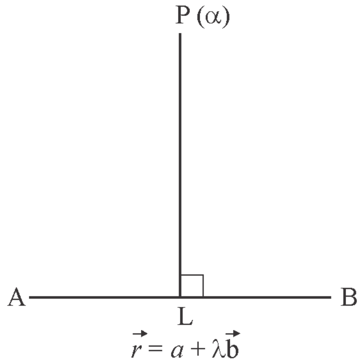
(3) और (4) को हल करने पर, $\lambda = -5$ और $\mu = -4$.

लेकिन λ और μ के मान (5) को सन्तुष्ट नहीं करते हैं। अतः दी गई रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती हैं।

14.09 एक रेखा से एक बिन्दु की लम्बवत दूरी (Perpendicular distance of a point from a line)

सदिश रूप: स्थिति सदिश $\vec{\alpha}$ वाले बिन्दु से रेखा $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ पर डाले लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना:

माना $P(\vec{\alpha})$ बिन्दु से दी गयी रेखा पर डाले लम्ब का पाद L है।



आकृति 14.05

$\because$ $\vec{r}$ रेखा पर स्वेच्छ बिन्दु है अतः माना बिन्दु L का स्थिति सदिश $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ है।

$\therefore$ $\overrightarrow{PL}=L$ का स्थिति सदिश $-$ P का स्थिति सदिश

$$=\vec{a}+\lambda\vec{b}-\vec{\alpha}$$

$$=(\vec{a}-\vec{\alpha})+\lambda\vec{b}$$

$\because$ सदिश $\overrightarrow{PL}$ सदिश $\vec{b}$ के समान्तर रेखा के लम्बवत है अतः

$$\overrightarrow{PL}\cdot\vec{b}=0$$

$$\left\{(\vec{a}-\vec{\alpha})+\lambda\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}=0$$

$$(\vec{a}-\vec{\alpha})\cdot\vec{b}+\lambda|\vec{b}|^2=0$$

$$\lambda=-\frac{(\vec{a}-\vec{\alpha})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$\therefore$ L का स्थिति सदिश

$$=\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

$$=\vec{a}-\left(\frac{(\vec{a}-\vec{\alpha})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{PL}$ का समीकरण

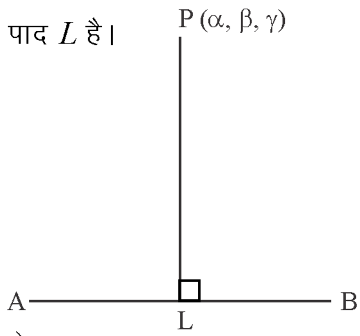
$$\vec{r}=\vec{\alpha}+\mu\left[\left\{\vec{a}-\left(\frac{(\vec{a}-\vec{\alpha})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}\right\}-\alpha\right]$$

$$=\vec{\alpha}+\mu\left[(a-\vec{\alpha})-\left\{\frac{(\vec{a}-\vec{\alpha})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right\}\vec{b}\right]$$

$\overrightarrow{PL}$ का परिमाण PL की लम्बाई है।

कार्तीय रूप: बिन्दु $P(\alpha,\beta,\gamma)$ से रेखा $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ डाले लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना:

बिन्दु $P(\alpha,\beta,\gamma)$ से दी रेखा $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ पर डाले गये लम्ब का पाद L है।



आकृति 14.06

माना L के निर्देशांक $(x_1+a\lambda,\ y_1+b\lambda,\ z_1+c\lambda)$ है।

$\therefore$ PL के दिक् अनुपात $x_1+a\lambda-\alpha,\ y_1+b\lambda-\beta$ तथा $z_1+c\lambda-\gamma$ है।

रेखा AB के दिक् अनुपात a, b, c है।

$\because$ PL व AB परस्पर लम्बवत है, अतः

$$(x_1+a\lambda-\alpha)a+(y_1+b\lambda-\beta)b+(z_1+c\lambda-\gamma)c=0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda=\frac{a(\alpha-x_1)+b(\beta-y_1)+c(\gamma-z_1)}{a^2+b^2+c^2}$$

λ का मान L के निर्देशांक में रखने पर हमें L के वास्तविक निर्देशांक प्राप्त होंगे। अब दूरी सूत्र का प्रयोग कर PL की दूरी ज्ञात करते है।

विधि को निम्न दृष्टांतीय उदाहरण से समझा जा सकता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-16. बिन्दु (1, 2, 3) से रेखा $\frac{x-6}{3}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-7}{-2}$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना बिन्दु P (1, 2, 3) से दी गई रेखा पर डाले गए लम्ब का पाद L है।

रेखा $\frac{x-6}{3}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-7}{-2}$ पर व्यापक बिन्दु के निर्देशांक $\frac{x-6}{3}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-7}{-2}=\lambda$ (माना) से प्राप्त करने पर L के निर्देशांक

$$(3\lambda+6,\ 2\lambda+7,\ -2\lambda+7) \qquad (1)$$

$\therefore$ PL के दिक्–अनुपात

$$3\lambda+6-1,\ 2\lambda+7-2,\ -2\lambda+7-3$$

अर्थात् $3\lambda+5,\ 2\lambda+5,\ -2\lambda+4$

दी गई रेखा के दिक्–अनुपात (3, 2, –2) हैं। चूंकि PL दी गई रेखा पर लम्ब है, अतः

$$3(3\lambda+5)+2(2\lambda+5)+(-2)(-2\lambda+4)=0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda=-1$$

समीकरण (1) में $\lambda=-1$ रखने पर L के निर्देशांक (3, 5, 9) हैं।

$$PL=\sqrt{(3-1)^2+(5-2)^2-(9-3)^2}$$
$$= 7 \text{ इकाई}$$

अतः अभीष्ट लम्ब की लम्बाई 7 इकाई है।

प्रश्नमाला 14.4

1. दिखाइए कि रेखाएं $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ और $\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z$ परस्पर प्रतिच्छेदी हैं। उनका प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।
2. निर्धारित करें निम्न रेखाएं प्रतिच्छेदी है या नहीं $\vec{r}=(\hat{i}-\hat{j})+\lambda(2\hat{i}+\hat{k})$ और $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j})+\mu(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$.
3. बिन्दु (2, 3, 4) से रेखा $\frac{4-x}{2}=\frac{y}{6}=\frac{1-z}{3}$ पर डाले गये लम्ब का पाद ज्ञात कीजिए। साथ ही दिए गए बिन्दु से रेखा की लम्बवत् दूरी भी ज्ञात कीजिए।
4. बिन्दु (2, 3, 2) से जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $\vec{r}=(-2\hat{i}+3\hat{j})+\mu(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})$ के समान्तर है। इन रेखाओं के मध्य की दूरी भी ज्ञात कीजिए।

14.10 विषमतलीय रेखाएँ तथा दो विषमतलीय रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी (Skew lines and shortest distance between two skew lines)

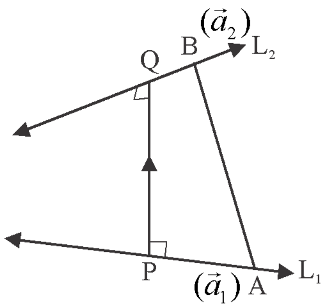
अंतरिक्ष में ऐसी रेखाएँ जो न तो प्रतिच्छेद करती है और न ही समान्तर होती है। ऐसी रेखाएँ किसी एक समल में समाहित नहीं हो सकती अतः इन्हें विषमतलीय रेखाएँ (skew lines) कहते हैं।

दो विषमतलीय रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी से हमारा अभिप्राय एक ऐसे रेखाखण्ड से है तो एक रेखा पर स्थित एक बिन्दु को दूसरे रेखा पर स्थित अन्य बिन्दु को मिलाने से प्राप्त हो ताकि इसकी लम्बाई न्यूनतम हो। यह एक अद्विितय रेखा खण्ड होता है जो दोनो विषमतलीय रेखाओं पर लम्ब होगा।

टिप्पणी: यदि दो रेखाएं किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है, तो उनके मध्य न्यूनतम दूरी शून्य होगी।

14.11 दो विषमतलीय रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात करना (To find the shortest distance between two skew lines)

सदिश रूप (Vector form)



आकृति 14.07

मान लीजिए L_1 और L_2 दो विषमतलीय रेखाएँ है जिनके समीकरण निम्नलिखित है

$$L_1 : \vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$$

$$L_2 : \vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$$

आकृति से स्पष्ट है कि रेखा $L_1, \vec{b}_1$ के समान्तर तथा $A(\vec{a}_1)$ से गुजरती है तथा रेखा $L_2, \vec{b}_2$ के समान्तर तथा $B(\vec{a}_2)$ से गुजरती है। यदि L_1 और L_2 के मध्य न्यूनतम दूरी सदिश $\overrightarrow{PQ}$ का परिमाण है, तो सदिश $\overrightarrow{PQ}$, सदिश $\vec{b}_1$ और सदिश $\vec{b}_2$ दोनों के ही लम्ब होगा। अर्थात् सदिश $\overrightarrow{PQ}, \left(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right)$ की दिशा में होगा। यदि $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ की दिशा में इकाई सदिश $\hat{n}$ हो, तो

$$\hat{n} = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}$$

अतः $\qquad \overrightarrow{PQ} = (PQ)\hat{n} = d\hat{n}$, जहाँ $PQ = d$ (Shortest Distance)

मान लीजिए $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{PQ}$ के मध्य कोण θ है, तब

$$PQ = AB\cos\theta \qquad (1)$$

परन्तु
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{PQ}\right|} \qquad (2)$$

$$= \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(d\hat{n})}{(AB)(d)}, \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

$$= \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot \hat{n}}{(AB)}$$

अतः (1) से
$$PQ = (AB)\frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot \hat{n}}{(AB)}$$

$$= (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot \hat{n}$$

$$= \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot\left(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}$$

अतः अभीष्ट न्यूनतम दूरी,
$$= d = PQ = \left|\frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot\left(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$$

टिप्पणी: यदि दोनों रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती है, तो दोनों के मध्य न्यूनतम दूरी शून्य होगी।

अर्थात् $$\left|\frac{(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|}\right|=0$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left[(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\ \vec{b}_1\ \ \vec{b}_2\right]=0$$

कार्तीय रूप (Cartesian form)

रेखाओं $$L_1: \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$$

और $$L_2: \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

के मध्य की न्यूनतम दूरी है

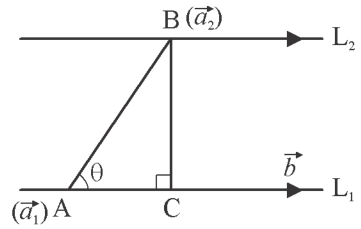
$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}$$

14.12 दो समान्तर रेखाओं के मध्य दूरी (Distance between two parallel lines)

यदि दो रेखाएँ L_1 और L_2 समान्तर है, तो वे समतलीय भी होगी। माना दी गई रेखाऐं क्रमशः $\vec{r}=a_1+\lambda\vec{b}$ तथा $\vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{b}$ है।

आकृति से स्पष्ट है कि L_1 पर बिन्दु का स्थिति सदिश $\vec{a}_1$ है तथा L_2 पर बिन्दु B का स्थिति सदिश $\vec{a}_2$ है। माना BC रेखा L_1 पर लम्ब है, जहाँ C, L_1 पर स्थित है। अतः रेखाओं L_1 और L_2 के मध्य की दूरी $= BC$

माना $\overrightarrow{AB}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण θ है।



आकृति 14.08

अतः $$\vec{b}\times\overrightarrow{AB}=\left(|\vec{b}||\overrightarrow{AB}|\sin\theta\right)\hat{n}$$

जहाँ $\hat{n}$, रेखाओं L_1 और L_2 के तल पर लम्ब इकाई सदिश है।

$$\Rightarrow \quad \vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)=|\vec{b}|(BC)\hat{n}, \text{ जहाँ } BC=(AB)\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\right|=|\vec{b}|(BC), \text{ जहाँ } |\hat{n}|=1$$

$$\Rightarrow \quad BC=\frac{\left|\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\right|}{|\vec{b}|}$$

अतः दी गई समान्तर रेखाओं के मध्य दूरी

$$d = BC = \left|\frac{\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right|$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-17. रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:

$$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}) \text{ और } \vec{r} = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$$

हल: $\vec{r} = \vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2+\mu\vec{b}_2$

हम देखते हैं: $\vec{a}_1 = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\ \vec{a}_2 = 4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}$

$\vec{b}_1 = \hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{b}_2 = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

$\therefore$ $(\vec{a}_2-\vec{a}_1) = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})-(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) = (3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k})$

और
$$(\vec{b}_1\times\vec{b}_2) = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-3-6)+\hat{j}(4-1)+\hat{k}(3+6) = -9\hat{i}+3\hat{j}+9\hat{k}$$

$\therefore$ $|\vec{b}_1\times\vec{b}_2| = \sqrt{81+9+81} = \sqrt{171}$

$$\text{S.D.} = \frac{|(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)|}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|}$$

$\therefore$
$$\text{S.D.} = \frac{|(3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k})\cdot(-9\hat{i}+3\hat{j}+9\hat{k})|}{\sqrt{171}}$$

$$= \frac{|-27+9+27|}{\sqrt{171}} = \frac{9}{\sqrt{171}} = \frac{9}{3\sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{19}}$$

उदाहरण-18. रेखाओं $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3}$ तथा $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$ के मध्य की लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई रेखाओं के समीकरण

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3} \tag{1}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2} \tag{2}$$

समीकरण (1) से, रेखा $(3, 4, -1)$ से गुजरती है और इसके दिक् अनुपात $2,\ 1,\ -3$ है, अतः सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ से

$$\vec{a}_1 = 3\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k},\ \vec{b}_1 = 2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$$

इसी प्रकार रेखा (2) से,

$$\vec{a}_2 = \hat{i}+3\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}_2 = -\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$$

अब $\qquad \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \left(\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}\right) - \left(3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}\right) = -2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

और $\qquad \vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 11\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore \qquad |\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = |11\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}| = \sqrt{121+1+49} = \sqrt{171} = 3\sqrt{19}$

लघुतम दूरी $\qquad = \left|\dfrac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$

$$= \left|\frac{(-2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})\cdot(11\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k})}{3\sqrt{19}}\right| = \left|\frac{-22+1+14}{3\sqrt{19}}\right| = \frac{7}{3\sqrt{19}}$$

उदाहरण-19. निम्नलिखित दी गई रेखाओं L_1 और L_2

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\left(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}\right) \text{ और } \vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu\left(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}\right)$$

के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः दी गई दोनों रेखाएँ समातंर है। इनकी $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}$ तथा $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}$ से तुलना करने पर,

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k},\ \vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

और $\quad \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$

अतः रेखाओं के मध्य की दूरी

$$d = \left|\frac{\vec{b} \times \left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right)}{|\vec{b}|}\right| = \left|\frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+9+36}}\right| = \frac{\left|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}\right|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7}$$

प्रश्नमाला 14.5

1. रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।
2. रेखाओं $\dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y+1}{-6} = \dfrac{z+1}{1}$ और $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z-7}{1}$ के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।
3. रेखाएं, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित है, के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:

   $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$
4. रेखाएं, जिनकी सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:

   $\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$ और $\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$
5. निम्न रेखाओं के मध्य लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए:

   $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = z$ और $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{1}, z = 2$

तथा लघुतम दूरी वाली रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

14.13 समतल (Plane)

समतल से हमारा तात्पर्य एक ऐसे पृष्ठ से है जिस पर यदि दो भिन्न बिन्दु लिए जाएं तो इनको मिलाने वाली रेखा खण्ड का प्रत्येक बिन्दु अभीष्ट पृष्ठ पर स्थित हो अर्थात् सम्पूर्ण रेखा उस पृष्ठ पर स्थित हो।

14.14 समतल का व्यापक समीकरण (General equation of a plane)

सिद्ध करना कि x, y तथा z में एक घातीय व्यापक समीकरण सदैव एक समतल को व्यक्त करता है।

माना x, y तथा z में एक घातीय व्यापक समीकरण

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{1}$$

है, जहाँ a, b, c तथा d स्थिरांक है तथा a, b, c सभी शून्य नहीं है।

माना समीकरण (1) द्वारा निरूपित पृष्ठ पर $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ दो बिन्दु हैं, तो

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \tag{2}$$

तथा
$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \tag{3}$$

(2) को m_2 तथा (3) को m_1 से (जहाँ $m_1 + m_2 \neq 0$) गुणा कर योग करने पर

$$a(m_2x_1 + m_1x_2) + b(m_2y_1 + m_1y_2) + c(m_2z_1 + m_1z_2) + d(m_1 + m_2) = 0$$

या
$$a\left(\frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2}\right) + b\left(\frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2}\right) + c\left(\frac{m_2z_1 + m_1z_2}{m_1 + m_2}\right) + d = 0$$

इससे यह स्पष्ट रूप से प्रदर्शित होता है कि बिन्दु P तथा Q को $m_1 : m_2$ अनुपात में विभाजित करने वाला बिन्दु

$$R\left(\frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_2z_1 + m_1z_2}{m_1 + m_2}\right)$$

भी m_1, m_2 के प्रत्येक मान के लिए ($m_1 = -m_2$ के अतिरिक्त) समीकरण (1) द्वारा निरूपित पृष्ठ पर स्थित है।

यहाँ हमने यह प्रदर्शित किया है कि यदि $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ पृष्ठ (1) पर स्थित है तो P तथा Q को मिलाने वाली रेखा का प्रत्येक बिन्दु R भी पृष्ठ (1) पर स्थित है अर्थात् सम्पूर्ण रेखा PQ पृष्ठ (1) पर स्थित है।

अतः (1) द्वारा निरूपित पृष्ठ एक समतल है। इस प्रकार सिद्ध होता है कि x, y, z में एक में एक घातीय व्यापक समीकरण (1) सदैव एक समतल को निरूपित करता है।

उप प्रमेयः एक बिन्दु रूप (One point form):

सिद्ध करना कि एक बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0,$$

होता है।

माना आवश्यक समतल का समीकरण निम्न हैः

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{1}$$

चूंकि यह समतल बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरता है,

अतः
$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0. \tag{2}$$

(1) से (2) को घटाने पर,

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0, \tag{3}$$

जो कि अभीष्ट समतल का समीकरण है।

विशेष स्थितियाँ: समतल के व्यापक समीकरण $ax+by+cz+d=0$ में

		यदि		समतल का रूप		निष्कर्ष
1.		$d=0$	$\Rightarrow$	$ax+by+cz=0$	$\Rightarrow$	समतल मूल बिन्दु से गुजरेगा।
2.	(i)	$a=0$	$\Rightarrow$	$by+cz+d=0$	$\Rightarrow$	समतल X - अक्ष के समान्तर है।
	(ii)	$b=0$	$\Rightarrow$	$ax+cz+d=0$	$\Rightarrow$	समतल Y - अक्ष के समान्तर है।
	(iii)	$c=0$	$\Rightarrow$	$ax+by+d=0$	$\Rightarrow$	समतल Z - अक्ष के समान्तर है।
3.	(i)	$a=0,\ d=0$	$\Rightarrow$	$by+cz=0$	$\Rightarrow$	समतल X - अक्ष के गुजरता है।
	(ii)	$b=0,\ d=0$	$\Rightarrow$	$ax+cz=0$	$\Rightarrow$	समतल Y - अक्ष के गुजरता है।
	(iii)	$c=0,\ d=0$	$\Rightarrow$	$ax+by=0$	$\Rightarrow$	समतल Z - अक्ष के गुजरता है।
4.	(i)	$b=0,\ c=0$	$\Rightarrow$	$ax+d=0$	$\Rightarrow$	समतल X - अक्ष के लम्बवत है।
	(ii)	$a=0,\ c=0$	$\Rightarrow$	$by+d=0$	$\Rightarrow$	समतल Y - अक्ष के लम्बवत है।
	(iii)	$a=0,\ b=0$	$\Rightarrow$	$cz+d=0$	$\Rightarrow$	समतल Z - अक्ष के लम्बवत है।
5.	(i)	$a=b=d=0$	$\Rightarrow$	$cz=0$	$\Rightarrow$	समतल XY - तल के संपाती है।
	(ii)	$b=c=d=0$	$\Rightarrow$	$ax=0$	$\Rightarrow$	समतल YZ - तल के संपाती है।
	(iii)	$a=c=d=0$	$\Rightarrow$	$by=0$	$\Rightarrow$	समतल ZX - तल के संपाती है।

टिप्पणी: क्योंकि समतल के समीकरण में तीन स्वेच्छ स्वतंत्र स्थिरांक है अतः समतल का समीकरण पूर्ण रूप से निर्धारित करने के लिए तीन स्थिरांक ज्ञात करने होते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-20. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा, समतल $ax+by+cz+d=0$ द्वारा विभाजित होती है।

हल: माना बिन्दुओं P तथा Q को मिलाने वाली रेखा, समतल $ax+by+cz+d=0$ द्वारा $\lambda:1$ अनुपात में विभाजित होती है।

माना समतल एवं रेखा का प्रतिच्छेद बिन्दु R है। अतः बिन्दु R रेखा PQ पर स्थित है तथा PQ को $\lambda:1$ अनुपात में विभाजित करता है। अतः R के निर्देशांक $\left(\dfrac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \dfrac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}, \dfrac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right)$ होंगे।

चूंकि बिन्दु R समतल पर भी स्थित है। अतः यह समतल के समीकरण को संतुष्ट करेगा।

$$\therefore \qquad a\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}\right)+b\left(\frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)+c\left(\frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right)+d=0$$

या $$a(\lambda x_2+x_1)+b(\lambda y_2+y_1)+c(\lambda z_2+z_1)+d(\lambda+1)=0$$

या $$\lambda(ax_2+by_2+cz_2+d)=-(ax_1+by_1+cz_1+d)$$

या $$\lambda=-\frac{(ax_1+by_1+cz_1+d)}{(ax_2+by_2+cz_2+d)}$$

यही अभीष्ट अनुपात है।

उदाहरण-21. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $P(-2, 4, 7)$ तथा $Q(3, -5, 8)$ को मिलाने वाली रेखा को निर्देशांक तलों द्वारा काटा जाता है।

हल: बिन्दुओं $P(-2, 4, 7)$ तथा $Q(3, -5, 8)$ को मिलाने वाली रेखा को $\lambda:1$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु R के निर्देशांक $\left(\dfrac{3\lambda-2}{\lambda+1}, \dfrac{-5\lambda+4}{\lambda+1}, \dfrac{8\lambda+7}{\lambda+1}\right)$ होंगे।

(i) यदि R, YZ तल पर स्थित है अर्थात् $x=0$ तल पर तो $\frac{3\lambda-2}{\lambda+1}=0$ या $\lambda=\frac{2}{3}$ । अर्थात् 2 : 3 अभीष्ट अनुपात है।

(ii) यदि R, ZX तल पर स्थित है अर्थात् $y=0$ तल पर तो $\frac{-5\lambda+4}{\lambda+1}=0$ या $\lambda=\frac{4}{5}$ । अर्थात् 4 : 5 अभीष्ट अनुपात है।

(iii) यदि R, XY तल पर स्थित है अर्थात् $z=0$ तल पर तो $\frac{8\lambda+7}{\lambda+1}=0$ या $\lambda=-\frac{7}{8}$ । अर्थात् –7 : 5 अभीष्ट अनुपात है।

14.15 समतल का अन्तः खण्ड रूप (Intercept form of a plane)

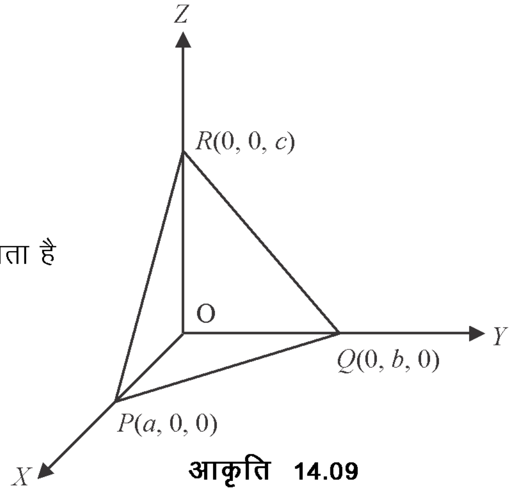
सिद्ध करना कि X, Y तथा Z-अक्षों पर क्रमशः a, b तथा c के अन्तः खण्ड काटने वाले समतल का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ होता है।

माना समतल का समीकरण

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

है। माना समतल (1) अक्षों पर क्रमशः बिन्दु P, Q तथा R पर इस प्रकार मिलता है कि $OP=a$, $OQ=b$ तथा $OR=c$

अतः बिन्दुओं P, Q तथा R के निर्देशांक कमशः $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ तथा $(0, 0, c)$ होंगे। चूंकि बिन्दु $P\,(a, 0, 0)$ समतल (1) पर स्थित है,



आकृति 14.09

$$\therefore \qquad A\cdot a+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0 \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{D}{a}$$

इसी प्रकार समतल (1) बिन्दुओं Q तथा R से भी गुजरता है तो $B=-D/b$ व $C=-D/c$

A, B, C के ये मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0 \quad \text{या} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

अर्थात् (2) ही अभीष्ट समतल का समीकरण है

टिप्पणीः समतल के व्यापक समीकरण को अन्तः खण्ड रूप में परिवर्तित कर समतल द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तः खण्ड ज्ञात किये जा सकते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-22. समतल के समीकरण $3x-4y+2z=12$ को अन्तः खण्ड रूप में परिवर्तित कर निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अन्तः खण्ड ज्ञात कीजिए।

हलः दिये समतल का समीकरण $3x-4y+2z=12$, है।

$$\Rightarrow \qquad \frac{3x}{12}-\frac{4y}{12}+\frac{2z}{12}=1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x}{4}+\frac{y}{(-3)}+\frac{z}{6}=1$$

इसकी तुलना समतल के अन्तः खण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ से करने पर हम देखते हैं कि समतल द्वारा निर्देशांक अक्षों X, Y तथा Z पर काटे गये अन्तः खण्ड क्रमशः 4, –3 तथा 6 हैं।

उदाहरण-23. एक समतल निर्देशांक अक्षों को A, B तथा C पर इस प्रकार मिलता है कि इससे निर्मित त्रिभज ABC का केन्द्रक, बिन्दु $K\,(p, q, r)$ है। प्रदर्शित कीजिए कि अभीष्ट समतल का समीकरण $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=3$ है।

हल: माना अभीष्ट समतल का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, है। अतः बिन्दु A, B तथा C के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0, 0), (0, b, 0)$ तथा $(0, 0, c)$ होंगे। अतः त्रिभुज ABC का केन्द्रक $K(a/3, b/3, c/3)$ होगा। परन्तु प्रश्नानुसार, त्रिभुज ABC का केन्द्रक $K(p, q, r)$ है।

$$\therefore \qquad \frac{a}{3}=p, \qquad \frac{b}{3}=q, \qquad \frac{c}{3}=r$$

$$\Rightarrow \qquad a=3p, \qquad b=3q, \qquad c=3r.$$

समीकरण (1) में a, b तथा c के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें अभीष्ट समतल का समीकरण

$$\frac{x}{3p}+\frac{y}{3q}+\frac{z}{3r}=1, \qquad \text{अर्थात्} \qquad \frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=3,$$

प्राप्त होता है।

उदाहरण-24. एक चर समतल इस प्रकार गति करता है कि इसके द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अन्तः खण्डों के व्युत्क्रमों का योग एक स्थिरांक है। सिद्ध कीजिए कि यह समतल एक नियत बिन्दु से गुजरता है।

हल: माना कि चर समतल का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (1)$

है, अतः इसके द्वारा अक्षों पर अन्तःखण्ड a, b तथा c काटे जाते हैं।

प्रश्नानुसार, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=$ स्थिरांक $=\frac{1}{\lambda}$ (माना)

$$\therefore \qquad \frac{\lambda}{a}+\frac{\lambda}{b}+\frac{\lambda}{c}=1 \qquad (2)$$

समीकरण (2) प्रदर्शित करता है कि बिन्दु $(\lambda, \lambda, \lambda)$ समीकरण (1) को सन्तुष्ट करता है, अर्थात् समतल (1) नियत बिन्दु $(\lambda, \lambda, \lambda)$ से गुजरता है।

14.16 समतल का अभिलम्ब रूप में समीकरण (Equation of a plane in normal form)

सदिश रूप: एक समतल का मूल बिन्दु से लम्ब दूरी (p) तथा समतल के लम्बवत इकाई सदिश $(\hat{n})$ दिये गये हो तो समतल का समीकरण ज्ञात करना:

माना संदर्भ का मूल बिन्दु O है।

माना $ON = p =$ दिये समतल पर मूल बिन्दू से डाले गये लम्ब की लम्बाई है।

माना समतल पर लम्ब इकाई सदिश $\hat{n}$ है जिसकी दिशा O से N की तरफ धनात्मक है।

$$\therefore \qquad \overrightarrow{ON} = p\hat{n} \qquad (1)$$

माना समतल पर स्थित किसी बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है तब P समतल पर कहीं भी स्थित हो $\overrightarrow{NP} \perp \overrightarrow{ON}$.

$$\therefore \qquad \overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{ON}=0 \qquad (2)$$

परन्तु $\qquad \overrightarrow{NP}=\vec{r}-p\hat{n} \qquad (3)$

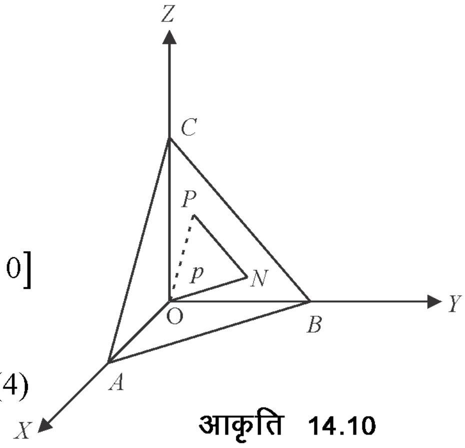
समीकरणों (1), (2) तथा (3) द्वारा

$$(\vec{r}-p\hat{n})\cdot p\hat{n}=0$$

या $\qquad (\vec{r}-p\hat{n})\cdot\hat{n}=0 \qquad [\because\ p\neq 0]$

या $\qquad \vec{r}\cdot\hat{n}-p\hat{n}\cdot\hat{n}=0$

या $\qquad \vec{r}\cdot\hat{n}=p \quad [\because \hat{n}\cdot\hat{n}=1] \quad (4)$



आकृति 14.10

कार्तीय रूपः मान लो ABC कोई एक समतल है तथा ON, मूल बिन्दु से इस पर लम्ब है, जहाँ N लम्ब का पाद है। यदि मूल बिन्दु से समतल पर खींचे गये इस लम्ब ON की लम्बाई p तथा दिक् कोज्याएं l, m, n हो तो समतल का समीकरण l, m, n तथा p के पदों में ज्ञात करेंगे।

स्पष्टतः बिन्दु N के निर्देशांक (lp, mp, np) है। यदि समतल में स्थित कोई एक बिन्दु $P(x, y, z)$ लें तो रेखा PN की दिक् कोज्याएं $\frac{x-lp}{PN}, \frac{y-mp}{PN}, \frac{z-np}{PN}$, होंगी। अब चूंकि ON समतल पर लम्ब है, अतः यह समतल में स्थित प्रत्येक रेखा पर लम्ब होगा। फलतः ON तथा PN परस्पर लम्बवत है। अतः लम्ब प्रतिबन्ध से

$$l\left(\frac{x-lp}{PN}\right)+m\left(\frac{y-mp}{PN}\right)+\left(\frac{z-np}{PN}\right)=0$$

$$\Rightarrow \qquad lx+my+nz=p\left(l^2+m^2+n^2\right)$$

$$\Rightarrow \qquad lx+my+nz=p \qquad \left[\because\ l^2+m^2+n^2=1\right]$$

राशियों l, m, n तथा p में यह सम्बन्ध समतल ABC के प्रत्येक बिन्दु (x, y, z) के लिए सत्य होगा। अतः अभिलम्ब रूप में यह अभीष्ट समतल का समीकरण है।

टिप्पणीः 1. माना $\vec{n}$ एक सदिश है जिसका परिमाण n तथा दिशा $\hat{n}$ की दिशा है तो $\vec{n}=n\hat{n}$.

अतः समीकरण (4) से $\qquad \vec{r}\cdot(\vec{n}/n)=p \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}=np$

या $\qquad \vec{r}\cdot\vec{n}=q$ (माना), $\qquad$ (5)

जहाँ $\qquad q=np$ या $p=q/n.$ $\qquad$ (6)

$\therefore$ समीकरण (5), $\vec{n}$ के लम्बवत समतल के सदिश समीकरण को निरूपित करता है।

एवं $\quad p=$ समतल (5) पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई है।

$\quad = q/n = q/|\vec{n}| = q(\vec{n}$ का परिमाण)

2. जब मूल बिन्दु समतल पर स्थित हो तो $p=0$, अतः समतल जो मूल बिन्दु से गुजरता है एवं सदिश $\vec{n}$ के लम्बवत है, का समीकरण $\vec{r}\cdot\vec{n}=0$ होगा

3. समतल के अभिलम्ब रूप के समीकरण में सदिश $\vec{n}$ की दिशा मूल बिन्दु से समतल की तरफ तथा p धनात्मक होता है।

4. यदि समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ द्वारा अक्षों पर अन्तः खण्ड x_1, y_1, z_1 काटे जाते हैं तो इन बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $x_1 i, y_1 j$ तथा $z_1 k$ होंगे। चूंकि यह बिन्दु समतल पर स्थित है अतः

$$x_1 i\cdot\vec{n}=q \qquad x_1 j\cdot\vec{n}=q, \qquad z_1 k\cdot\vec{n}=q$$

$$\Rightarrow \qquad x_1=\frac{q}{i\cdot\vec{n}}, \qquad y_1=\frac{q}{j\cdot\vec{n}}, \qquad z_1=\frac{q}{k\cdot\vec{n}}.$$

5. समतल के सदिश समीकरण का तात्पर्य एक ऐसे समीकरण से है जिसमें समतल के किसी स्वेच्छ बिन्दु का स्थिति सदिश $\vec{r}$ सम्मिलित हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-25. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 4 इकाई दूरी पर है तथा सदिश $i-2j+2k$ इसके अभिलम्ब है।

हलः सदिश रूपः यहाँ $p=4$ तथा $\vec{n}=i-2j+2k$

$$\therefore \qquad \hat{n}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{i-2j+2k}{\sqrt{(1+4+4)}}=\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}j+\frac{2}{3}k$$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण $\vec{r}\cdot\left(\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k\right)=4$

या $\vec{r}\cdot(i-2j+2k)=12$

यही अभीष्ट समतल का समीकरण है।

कार्तीय रूपः उपर्युक्त समीकरण में $\vec{r}=xi+yj+zk$ रखने पर समतल का कार्तीय रूप में

समीकरण $(xi+yj+zk)\cdot(i-2j+2k)=12$

अर्थात् $x-2y+2z=12$, प्राप्त होता है।

उदाहरण-26. समतल के समीकरण $\vec{r}\cdot(i-2j+2k)=12$ को अभिलम्ब रूप में परिवर्तित कर मूल बिन्दु से इसकी लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः सदिश रूपः समतल का दिया गया समीकरण $\vec{r}\cdot(i-2j+2k)=12$ है।

अर्थात् $\vec{r}\cdot\vec{n}=12,$

जहाँ $\vec{n}=i-2j+2k.$ $\therefore$ $|\vec{n}|=\sqrt{(1+4+4)}=3\neq 1$

अतः दिया गया समीकरण अभिलम्ब रूप में नहीं है।

$\therefore$ समीकरण को अभिलम्ब रूप में परिवर्तन करने हेतु दोनों तरफ $|\vec{n}|=3$ का भाग देने पर

$$(\vec{r}\cdot\vec{n})/3=12/3 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}\cdot\left(\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}j+\frac{2}{3}k\right)=4$$

यह समीकरण दिये गये समतल के अभिलम्ब रूप को प्रदर्शित करता है। तथा इसकी मूल बिन्दु से लम्ब दूरी 4 इकाई है।

कार्तीय रूपः दिए समतल का कार्तीय रूप में समीकरण

$$x-2y+2z=12$$

है। यहां दक्षिण पक्ष धनात्मक हैं। अब समीकरण में $\sqrt{(1+4+4)}=3\neq 1$ का भाग दोनों पक्षों में देने पर

$$\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=4,$$

प्राप्त समीकरण समतल के अभिलम्ब रूप को प्रकट करता है। इस समतल की मूल बिन्दु से लम्ब दूरी 4 इकाई हैं। यहां अभिलम्ब की दिक् कोज्याएं $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ हैं।

उदाहरण-27. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 2 इकाई दूरी पर हो तथा इसके अभिलम्ब के दिक् अनुपात 12, –3, 4 हो।

हलः कार्तीय रूपः प्रश्नानुसार $p=2$ तथा अभिलम्ब के दिक् अनुपात $12, -3, 4$ है।

अतः अभिलम्ब की दिक् कोज्याएं $12/13, -3/13, 4/13$ होगी, क्योंकि

$$\sqrt{\{(12)^2+(-3)^2+(4)^2\}}=13$$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण

$$\frac{12}{13}x-\frac{3}{13}y+\frac{4}{13}z=2, \qquad [lx+my+nz=p \text{ से}]$$

अर्थात् $12x-3y+4z=26,$

होगा, जो अभीष्ट समतल का समीकरण है।

सदिश रूपः माना $\vec{n}$ समतल के अभिलम्ब सदिश है एवं $\vec{n}$ के दिक् अनुपात 12, –3, 4 है।

$$\therefore \qquad \vec{n} = 12i - 3j + 4k \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{n}| = \sqrt{\{(12)^2 + (-3)^2 + (4)^2\}} = 13 \neq 1$$

$$\therefore \qquad \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{12}{13}i - \frac{3}{13}j + \frac{4}{13}k$$

अभीष्ट समतल मूल बिन्दु से 2 इकाई दूरी पर है अतः इसका समीकरण

$$\vec{r} \cdot \hat{n} = 2$$

अर्थात् $$\vec{r} \cdot \left(\frac{12}{13}i - \frac{3}{13}j + \frac{4}{13}k\right) = 2$$

होगा, जो अभीष्ट समतल का समीकरण है।

उदाहरण-28. समतल $\vec{r} \cdot (6i + 2j - 3k) + 7 = 0$ पर मूल बिन्दु से डाले लम्ब की दिक् कोज्याएं ज्ञात कीजिए।

हलः कार्तीय रूपः समतल का समीकरण निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है:

$$(xi + yj + zk) \cdot (6i + 2j - 3k) + 7 = 0$$

अर्थात् $$6x + 2y - 3z + 7 = 0$$

अर्थात् $$-6x - 2y + 3z = 7 \qquad (1)$$

जब $$\sqrt{\{(-6)^2 + (-2)^2 + (3)^2\}} = 7 \neq 1$$

अतः समीकरण (1) के सभी पक्षों में 7 का भाग देने पर, समीकरण

$$-\frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z = 1, \qquad (2)$$

प्राप्त होता है।

समीकरण (2) की तुलना समतल के अभिलम्ब रूप के मानक समीकरण से करने पर हमें मूल बिन्दु से समतल पर डाए गए लम्ब की दिक् कोज्याएं $-6/7, -2/7, 3/7$ प्राप्त होती हैं।

सदिश रूपः मूल बिन्दु से दिये समतल पर डाले गये लम्ब की दिक् कोज्याएं ज्ञात करने हेतु सर्वप्रथम दिए समतल को अभिलम्ब रूप में परिवर्तित करना होगा।

दिए समतल का समीकरण $\vec{r} \cdot (6i + 2j - 3k) + 7 = 0,$ है।

अर्थात् $$\vec{r} \cdot (6i + 2j - 3k) = -7$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r} \cdot (-6i - 2j + 3k) = 7$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r} \cdot \vec{n} = 7,$$ जहाँ $\vec{n} = (-6i - 2j + 3k)$ है।

अब $$|\vec{n}| = \sqrt{\{(-6)^2 + (-2)^2 + (3)^2\}} = 7 \neq 1.$$

अतः (1) के सभी पक्षों में $|\vec{n}| = 7$ का भाग देने पर

$$\frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{7} = \frac{7}{7}$$

या $$\vec{r} \cdot \left(-\frac{6}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{3}{7}k\right) = 1$$

अतः मूल बिन्दु से समतल पर डाले गये लम्ब की दिक् कोज्याएं $-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}$ हैं।

प्रश्नमाला 14.6

1. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो X- अक्ष के लम्ब है तथा बिन्दु $(2, -1, 3)$ से गुजरता है।
2. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो X- अक्ष तथा बिन्दु $(3, 2, 4)$ से गुजरता है।
3. एक चर समतल, बिन्दु (p, q, r) से गुजरता है तथा निर्देशी अक्षों को बिन्दु A, B तथा C पर मिलता है। प्रदर्शित कीजिए कि निर्देशांक समतलों के समान्तर A, B तथा C से गुजरने वाले समतलों के उभयनिष्ठ बिन्दु का बिन्दुपथ
$$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z}=1,$$
होगा।
4. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 7 इकाई दूरी पर है तथा i इसके अभिलम्ब की तरफ इकाई सदिश है।
5. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 7 इकाई दूरी पर है तथा सदिश $6i+3j-2k$ इसके अभिलम्ब है।
6. समतल के समीकरण $\vec{r}\cdot(3i-4j+12k)=5$ को अभिलम्ब रूप में परिवर्तित कर इसकी मूल बिन्दु से लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए। प्राप्त समतल के अभिलम्ब की दिक् कोज्याएं भी ज्ञात कीजिए।

या

समतल के समीकरण $3x-4y+12z=5$ को अभिलम्ब रूप में परिवर्तित कर इसकी मूल बिन्दु से लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए। समतल के अभिलम्ब की दिक् कोज्याएं भी ज्ञात कीजिए।
7. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 4 इकाई दूरी पर है तथा इसके अभिलम्ब के दिक् अनुपात $2, -1, 2$ हैं।
8. समतल के समीकरण $2x-3y+6z+14=0$ से समतल का अभिलम्ब रूप ज्ञात कीजिए।
9. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई 13 है तथा इस लम्ब के दिक् अनुपात $4, -3, 12$ है।
10. समतल $x+y+z-3=0$ का इकाई अभिलम्ब सदिश ज्ञात कीजिए।

14.17 दो समतलों के मध्य कोण (Angle between two planes)

दो समतलों के मध्य कोण से अभिप्राय उनके अभिलम्बों के मध्य कोण से है।

सदिश रूप: माना दो समतलों के समीकरण हैं

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1 \qquad \text{तथा} \qquad \vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2 \text{ है,}$$

जहाँ $\vec{n}_1$ और $\vec{n}_2$ समतलों के अभिलम्ब सदिश है। माना दोनों समतलों के मध्य कोण θ है तो समतलों के अभिलम्बों के मध्य कोण भी θ होगा।

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \qquad \text{या} \qquad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$$

टिप्पणी: (i) दोनों समतल परस्पर लम्बवत होंगे यदि $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$.

(ii) दोनों समतल परस्पर समान्तर होंगे यदि $\vec{n}_1=\lambda\vec{n}_2$, जहाँ λ अचर है।

कार्तीय रूप: माना $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ दो दिए गए समतल है जिनके मध्य कोण θ है। माना $\vec{n}_1$ और $\vec{n}_2$ इन समतलों के अभिलम्ब सदिश है तो

$$\vec{n}_1=a_1i+b_1j+c_1k$$

तथा
$$\vec{n}_2=a_2i+b_2j+c_2k$$

क्योंकि a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 क्रमशः समतलों के अभिलम्बों के दिक् अनुपात हैं।

$$\therefore \qquad \cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}\sqrt{(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}$$

टिप्पणीः (i) दोनों समतल परस्पर लम्बवत होंगे यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

(ii) दोनों समतल परस्पर समान्तर होंगे यदि $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

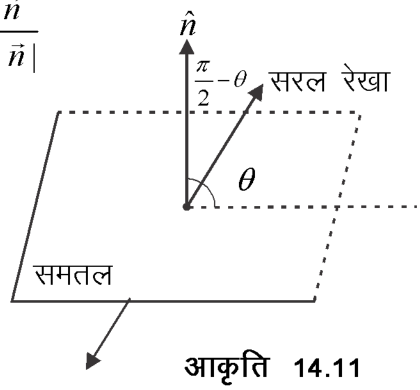
14.18 एक रेखा व एक समतल के मध्य कोण (Angle between a plane and a line)

एक रेखा व समतल के मध्य कोण, समतल के अभिलम्ब एवं रेखा के मध्य के कोण का पूरक (complement) होता है।

सदिश रूपः माना समतल का समीकरण है $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$, जहाँ $\vec{n}$ समतल के अभिलम्ब सदिश है, तथा रेखा का समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ है। यह रेखा, बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है, से गुजरती है, तथा सदिश $\vec{b}$ के समान्तर है।

यदि θ समतल और रेखा के मध्य कोण है, तो रेखा व समतल का अभिलम्ब के मध्य कोण $\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ होगा। अतः

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|} \qquad \text{या} \qquad \sin\theta = \frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$



आकृति 14.11

टिप्पणीः (i) रेखा समतल के लम्बवत होगी, यदि $\vec{b} \times \vec{n} = \vec{0}$ या $\vec{b} = \lambda\vec{n}$.

(ii) रेखा समतल के समान्तर होगी यदि $\vec{b}\cdot\vec{n} = 0$.

कार्तीय रूपः माना समतल का समीकरण है

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

तथा रेखा का समीकरण है

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad (2)$$

समतल (1) के अभिलम्ब के दिक् अनुपात a, b, c हैं तथा रेखा (2) के दिक् अनुपात l, m, n हैं। यदि सरल रेखा और समतल के मध्य कोण θ है, तो अभिलम्ब एवं रेखा के मध्य कोण $\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ होगा।

$$\therefore \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}}$$

$$\text{या} \qquad \sin\theta = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}}$$

टिप्पणीः (i) रेखा समतल के लम्बवत होगी, यदि $\dfrac{a}{\ell} = \dfrac{b}{m} = \dfrac{c}{n}$.

(ii) रेखा समतल के समान्तर होगी यदि, $a\ell + bm + cn = 0$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-29. समतलों $\vec{r}\cdot(2i-3j+4k)=1$ और $\vec{r}\cdot(-i+j)=4$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि दो समतलों $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$ और $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ के मध्य कोण

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|},$$

यहाँ $\vec{n}_1=2i-3j+4k$ तथा $\vec{n}_2=-i+j+0k$

$$\therefore \qquad \cos\theta=\frac{-2-3+0}{\sqrt{4+9+16}\sqrt{1+1}}=\frac{-5}{\sqrt{29}\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{58}}\right)$$

उदाहरण-30. सिद्ध कीजिए कि समतल $2x+6y+6z=7$ और $3x+4y-5z=8$ परस्पर लम्बवत है।

हल: हम जानते है कि समतल

$$2x+6y+6z=7$$

और $$3x+4y-5z=8$$

परस्पर लम्बवत होंगे, यदि इनके अभिलम्ब परस्पर लम्बवत होंगे।

अर्थात् $$2(3)+6(4)+6(-5)=0$$

या $$6+24-30=0$$

जो कि सत्य है, अतः दिये गये समतल परस्पर लम्बवत है।

उदाहरण-31. यदि समतल $\vec{r}\cdot(i+2j+3k)=7$ और $\vec{r}\cdot(\lambda i+2j-7k)=26$ परस्पर लम्बवत है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$ और $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ परस्पर लम्बवत होंगे यदि

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$$

दिये समतलों से $\vec{n}_1=(i+2j+3k)$ तथा $\vec{n}_2=(\lambda i+2j-7k)$, अतः प्रतिबंधानुसार

$$(i+2j+3k)\cdot(\lambda i+2j-7k)=0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda+4-21=0 \text{ या } \lambda=17$$

उदाहरण-32. रेखा $\vec{r}=(2i+2j+9k)+\lambda(2i+3j+4k)$ और समतल $\vec{r}\cdot(i+j+k)=5$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि रेखा $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ और समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$ के मध्य कोण θ हो, तो

$$\sin\theta=\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$

अतः मानक समीकरणों से तुलना करने पर, यहाँ

$$\vec{b}=2i+3j+4k \qquad \text{और} \qquad \vec{n}=i+j+k$$

$$\therefore \qquad \sin\theta=\frac{(2i+3j+4k)\cdot(i+j+k)}{\sqrt{4+9+16}\sqrt{1+1+1}}=\frac{9}{\sqrt{87}}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta=\sin^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{87}}\right) \qquad \text{या} \qquad \theta=\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\right)$$

उदाहरण-33. रेखा $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$ और समतल $2x+y-z=4$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल: समतल $$2x+y-z=4 \qquad (1)$$

के अभिलम्ब सदिश $\vec{n}=2i+j-k$ तथा रेखा $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$ के समान्तर सदिश $\vec{b}=i-j+k$ है। यदि समतल और सरल रेखा के मध्य कोण θ हो, तो

$$\sin\theta=\frac{(i-j+k)\cdot(2i+j-k)}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+1+1}}=\frac{2-1-1}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta=0$$

उदाहरण-34. यदि रेखा $\vec{r}=(i-2j+k)+\lambda(2i+j+2k)$, समतल $\vec{r}\cdot(3i-2j+mk)=4$ के समान्तर हो, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई रेखा, सदिश $\vec{b}=2i+j+2k$ के समान्तर है और समतल का अभिलम्ब सदिश $\vec{n}=3i-2j+mk$ है। क्योंकि दी गई रेखा समतल के समान्तर है अतः $\vec{b}\perp\vec{n}$

$$\Rightarrow \qquad \vec{b}\cdot\vec{n}=0$$

$$\Rightarrow \qquad (2i+j+2k)\cdot(3i-2j+mk)=0$$

$$\Rightarrow \qquad 6-2+2m=0$$

$$\Rightarrow \qquad m=-2$$

14.19 समतल से बिन्दु की दूरी (Distance of a point from a plane)

एक बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है, से समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना:

माना π दिया गया समतल है तथा P बिन्दु का स्थिति सदिश $\vec{a}$ है। माना बिन्दु P से π समतल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई PM है।

$\because$ रेखा PM, बिन्दु $P(\vec{a})$ से गुजरती है तथा समतल π के अभिलम्ब सदिश $\vec{n}$ के समान्तर है।

$\therefore$ रेखा PM का सदिश समीकरण $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{n}$ होगा, जहां λ अदिश है।

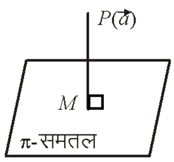
पुनः बिन्दु M, रेखा PM तथा π समतल का प्रतिच्छेदन बिन्दु है। अतः बिन्दु M समतल के सदिश समीकरण को संतुष्ट करेगा।

$$\therefore \qquad (\vec{a}+\lambda\vec{n})\cdot\vec{n}=q$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{a}\cdot\vec{n}+\lambda\vec{n}\cdot\vec{n}=q$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{a}\cdot\vec{n}+\lambda|\vec{n}|^2=q$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda=\frac{q-\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$$



आकृति 14.12

λ का यह मान रेखा PM के समीकरण में रखने से बिन्दु M का स्थिति सदिश

$$\vec{r}=\vec{a}+\frac{q-\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n},$$ प्राप्त होता है।

$\therefore$ $\overrightarrow{PM}$ = (M का स्थिति सदिश) – (P का स्थिति सदिश)

$$=\vec{a}+\frac{q-\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}-\vec{a}=\frac{(q-\vec{a}\cdot\vec{n})\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$$

$$\therefore \qquad PM = |\overrightarrow{PM}| = \frac{|(q-\vec{a}\cdot\vec{n})\vec{n}|}{|\vec{n}|^2} = \frac{|(q-\vec{a}\cdot\vec{n})||\vec{n}|}{|\vec{n}|^2} = \frac{|(q-\vec{a}\cdot\vec{n})|}{|\vec{n}|}$$

अतः अभीष्ट लम्बाई $\dfrac{|q-\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$ या $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{n}-q|}{|\vec{n}|}$ होगी।

टिप्पणी: (i)
$$\overrightarrow{PM} = (PM)\hat{n} = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}-q|}{|\vec{n}|}\hat{n}$$
$$= \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}-q|}{|\vec{n}|}\times\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}-q|\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$$

(ii) मूल बिन्दु से समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{q}{|\vec{n}|} \qquad [\text{यहाँ } \vec{a}=\vec{0}]$$

कार्तीय रूप: बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ से समतल $ax+by+cz+d=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना:

माना बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ से समतल $ax+by+cz+d=0$ पर डाले गए लम्ब का पाद M है। अतः रेखा PM का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}, \qquad (1)$$

होगा। क्योंकि समतल के अभिलम्ब के दिक् अनुपात $a,b,$ c रेखा PM के दिक् अनुपात होंगे। अतः इस रेखा पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(x_1+ar,\ y_1+br,\ z_1+cr)$ होंगे, जहाँ r एक वास्तविक संख्या है। यदि यह बिन्दु M के निर्देशांक है तो समतल के समीकरण को संतुष्ट करेंगे, अर्थात्

$$a(x_1+ar)+b(y_1+br)+c(z_1+cr)+d=0$$

या
$$r = -\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2} \qquad (2)$$

अब
$$PM = \sqrt{\left\{(x_1+ar-x_1)^2+(y_1+br-y_1)^2+(z_1+cr-z_1)^2\right\}}$$
$$= |r|\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$$

अब
$$PM = \left|-\frac{(ax_1+by_1+cz_1+d)}{(a^2+b^2+c^2)}\right|\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)} \qquad [(2) \text{ के प्रयोग से}]$$

अतः अभीष्ट लम्बाई $\left|(ax_1+by_1+cz_1+d)/\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\right|$ होगी।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-35. बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $2i-j-4k$ है, की समतल $\vec{r}\cdot(3i-4j+12k)-9=0$ से लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है, की समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ से लम्ब दूरी $\left|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{n}-q}{\vec{n}}\right|$ होती है।

यहाँ $\vec{a}=2i-j-4k,\ \vec{n}=3i-4j+12k$ तथा $q=9$ हैं।

$$\therefore \qquad \text{अभीष्ट दूरी} = \frac{|(2i-j-4k)\cdot(3i-4j+12k)-9|}{\sqrt{(9+16+144)}} = \frac{47}{13}$$

उदाहरण-36. प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु $A(1,-1,3)$ तथा $B(3,3,3)$, समतल $\vec{r}\cdot(5i+2j-7k)+9=0$ से बराबर दूरी पर है।

हलः बिन्दु A का स्थित सदिश $i-j+3k$ है।

$\therefore$ बिन्दु A की समतल से लम्ब दूरी $=\dfrac{|(i-j+3k)\cdot(5i+2j-7k)+9|}{\sqrt{(25+4+49)}}=\dfrac{9}{\sqrt{78}}$ (1)

पुनः बिन्दु B का स्थिति सदिश $3i+3j+3k$ है।

$\therefore$ बिन्दु B की समतल से लम्ब दूरी $=\dfrac{|(3i+3j+3k)\cdot(5i+2j-7k)+9|}{\sqrt{(25+4+49)}}=\dfrac{9}{\sqrt{78}}$ (2)

समीकरण (1) व (2) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि दिये गये बिन्दु समतल से बराबर दूरी पर है।

प्रश्नमाला 14.7

1. निम्न समतलों के मध्य कोण ज्ञात कीजिएः
   (i) $\vec{r}\cdot(2i-j+2k)=6$ तथा $\vec{r}\cdot(3i+6j-2k)=9$
   (ii) $\vec{r}\cdot(2i+3j-6k)=5$ तथा $\vec{r}\cdot(i-2j+2k)=9$
   (iii) $\vec{r}\cdot(i+j+2k)=5$ तथा $\vec{r}\cdot(2i-j+2k)=6$
2. निम्न समतलों के मध्य कोण ज्ञात कीजिएः
   (i) $x+y+2z=9$ और $2x-y+z=15$
   (ii) $2x-y+z=4$ और $x+y+2z=3$
   (iii) $x+y-2z=3$ और $2x-2y+z=5$
3. सिद्ध कीजिए कि निम्न समतल परस्पर लम्बवत है।
   (i) $x-2y+4z=10$ और $18x+17y+4z=49$
   (ii) $\vec{r}\cdot(2i-j+k)=4$ और $\vec{r}\cdot(-i-j+k)=3$
4. ; fn fuEu l er y i jLi j y Ecor gk$r ks λ का मान ज्ञात कीजिए।
   (i) $\vec{r}\cdot(2i-j+\lambda k)=5$ और $\vec{r}\cdot(3i+2j+2k)=4$
   (ii) $2x-4y+3z=5$ और $x+2y+\lambda z=5$
5. रेखा $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$ और समतल $2x+y-3z+4=0$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।
6. रेखा $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ और समतल $3x+4y+z+5=0$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।
7. रेखा $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ और समतल $\vec{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=4$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।
8. रेखा $\vec{r}=(2i+3j+k)+\lambda(i+2j-k)$ और समतल $\vec{r}\cdot(2i-j+k)=4$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।
9. यदि रेखा $\vec{r}=(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$, समतल $\vec{r}\cdot(3\hat{i}-2\hat{j}+m\hat{k})=3$ के समान्तर हो, तो m का मान ज्ञात कीजिए।
10. यदि रेखा $\vec{r}=i+\lambda(2i-mj-3k)$, समतल $\vec{r}\cdot(mi+3j+k)=4$ के समान्तर हो, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

विविध प्रश्नमाला—14

1. निम्न में से कौनसा समूह एक रेखा की दिक् कोज्याएँ नहीं है:

(क) 1, 1, 1 (ख) 0, 0, –1 (ग) –1, 0, 0 (घ) 0, –1, 0

2. बिन्दु P समष्टि में इस प्रकार है कि $OP = 6$ तथा $\overrightarrow{OP}, OX$ तथा OY-अक्षों के साथ क्रमशः 45° व 60° के कोण बनाता है तो P का स्थिति सदिश होगा:

(क) $3i + 3j \pm 3\sqrt{2}k$ (ख) $6i + 6\sqrt{2}j \pm 6k$ (ग) $3\sqrt{2}i + 3j \pm 3k$ (घ) $3i + 3\sqrt{2}j \pm 3k$

3. धन के दो विकर्णों के मध्य का कोण होगा

(क) 30° (ख) 45° (ग) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3})$ (घ) $\cos^{-1}(1/3)$

4. सदिश $3i$ की दिक् कोज्याएं होगी:

(क) 3, 0, 0 (ख) 1, 0, 0 (ग) –1, 0, 0 (घ) –3, 0, 0

5. सरल रेखा $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{x+7}{13}$ का सदिश रूप होगा

(क) $(3i + 4j - 7k) + \lambda(-2i - 5j + 13k)$ (ख) $(-2i - 5j + 13k) + \lambda(3i + 4j - 7k)$

(ग) $(-3i - 4j + 7k) + \lambda(-2i - 5j + 13k)$ (घ) इनमें से कोई नहीं

6. रेखाएँ $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{\lambda} = \dfrac{z-1}{-1}$ तथा $\dfrac{x-1}{-\lambda} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$ परस्पर लम्बवत हो तो λ का मान होगा

(क) 0 (ख) 1 (ग) –1 (घ) 2

7. रेखाओं $\vec{r} = (5i + 7j + 3k) + \lambda(5i - 16j + 7k)$ तथा $\vec{r} = (9i + 13j + 15k) + \mu(3i + 8j - 5k)$ के मध्य लघुत्तम दूरी है

(क) 10 इकाई (ख) 12 इकाई (ग) 14 इकाई (घ) 7 इकाई

8. रेखा $\vec{r} = (2i - j + k) + \lambda(-i + j + k)$ तथा समतल $\vec{r} \cdot (3i + 2j - k) = 4$ के मध्य कोण होगा

(क) $\sin^{-1}(-2/\sqrt{42})$ (ख) $\sin^{-1}(2/\sqrt{42})$ (ग) $\cos^{-1}(-2/\sqrt{42})$ (घ) $\cos^{-1}(2/\sqrt{42})$

9. समीकरण $lx + my + nz = p$ समतल का अभिलम्ब रूप है तो निम्न में से असत्य है:

(क) l, m, n समतल के अभिलम्ब की दिक् कोज्याएं हैं। (ख) p, समतल की मूल बिन्दु से लम्बवत दूरी है।

(ग) p के प्रत्येक मान के लिए समतल मूल बिन्दु से गुजरता हैं। (घ) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

10. एक समतल निर्देशांक अक्षों को A, B, C पर इस प्रकार मिलता है कि त्रिभुज ABC का केन्द्रक (1, 2, 3) है तो समतल का समीकरण होगा

(क) $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$ (ख) $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = \dfrac{1}{6}$ (ग) $\dfrac{x-1}{1} + \dfrac{y-2}{2} + \dfrac{z-3}{3} = 1$ (घ) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{9} = 1$

11. दो बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $P(2i + j + 3k)$ तथा $Q(-4i - 2j + k)$ हैं। Q से गुजरने वाले तथा PQ के लम्बवत समतल का समीकरण होगा:

(क) $\vec{r} \cdot (6i + 3j + 2k) = 28$ (ख) $\vec{r} \cdot (6i + 3j + 2k) = 32$

(ग) $\vec{r} \cdot (6i + 3j + 2k) + 28 = 0$ (घ) $\vec{r} \cdot (6i + 3j + 2k) + 32 = 0$

12. दो रेखाओं की दिक् कोज्याएं निम्न सम्बन्धों द्वारा दी गई हैं, उन्हें ज्ञात कीजिए।

$$l - 5m + 3n = 0 \quad \text{तथा} \quad 7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$$

13. एक रेखा खण्ड का अक्षों पर प्रक्षेप –3, 4, –12 है। रेखा खण्ड की लम्बाई तथा दिक् कोज्याएं ज्ञात कीजिए।

14. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (a, b, c) और (a', b', c') को मिलाने वाली रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है, यदि $aa' + bb' + cc' = pp'$, जहाँ p और p' इन बिन्दुओं की मूल बिन्दु से दूरियाँ हैं।

15. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $P(-2, 1, 2)$ से गुजरता है एवं दो सदिशों $\vec{a} = -i + 2j - 3k$ तथा $\vec{b} = 5i - j + k$ के समान्तर है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **एक रेखा की दिक् कोज्याएँ:** यदि एक रेखा OP (सदिश $\overrightarrow{OP}$) निर्देशांक अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः α, β, γ कोण बनाये तो $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ को रेखा OP (सदिश $\overrightarrow{OP}$) की दिक् कोज्याएं कहते हैं तथा साधारणतः इनको l, m, n से निरूपित किया जाता है।

   यहाँ $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$.

   (i) सदिश $\overrightarrow{PO}$; OX, OY तथा OZ – अक्षों के साथ कोण $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$ बनाता है। अतः $\overrightarrow{PO}$ की दिक्-कोज्याएं $\cos(\pi-\alpha), \cos(\pi-\beta)$, $\cos(\pi-\gamma)$ अर्थात् $-l, -m, -n$ होगी।

   अतः यदि l, m, n किसी रेखा की दिक् कोज्याएं है तो $-l, -m, -n$ भी उसी रेखा की दिक् कोज्याएं होगी क्योंकि हर स्थिति में आधार रेखा वही है।

   (ii) X, Y तथा Z- अक्षों की दिक् कोज्याएं क्रमशः 1, 0, 0; 0, 1, 0 तथा 0, 0, 1 हैं।

2. **निर्देशांक अक्षों पर एक सदिश का प्रक्षेप:** यदि $\vec{r}$ दिया गया सदिश हैं एवं l, m, n इसकी दिक् कोज्याएं हैं तो इस सदिश का X, Y तथा Z- अक्षों पर प्रक्षेप क्रमशः lr, mr तथा nr होते हैं।

3. **दिक् कोज्याओं के रूप में एक बिन्दु के निर्देशांक:** यदि $P(x, y, z)$ एक बिन्दु है तो इसके निर्देशांक (lr, mr, nr) होंगे, जहाँ $l, m, n, \overrightarrow{OP}$ की दिक् कोज्याएँ हैं तथा $|\vec{r}| = r$, $\overrightarrow{OP}$ का परिमाण है।

4. **इकाई सदिश $\hat{r}$ को दिक् कोज्याओं के रूप में व्यक्त करना:**

$$\hat{r}\,(\vec{r} \text{ की दिशा में इकाई सदिश}) = li + mj + nk,$$

   जहाँ l, m, n सदिश $\vec{r}$ की दिक् कोज्याएं हैं।

5. $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, जहाँ l, m, n किसी रेखा की दिक् कोज्याएँ हैं।

6. **एक रेखा के दिक् अनुपात:** किसी सदिश $\vec{r}$ के लिए तीन संख्याओं का एक समूह जो दिक् कोज्याओं l, m, n के समानुपाती हो, को सदिश $\vec{r}$ के दिक् अनुपात कहते हैं।

7. **दिक् अनुपातों का दिक् कोज्याओं में परिवर्तन:** माना $\vec{r} = ai + bj + ck$ एक सदिश है इसके दिक् अनुपात i, j, k के गुणांक a, b तथा c हैं। अतः इस रेखा की दिक् कोज्याएँ l, m, n निम्न प्रकार से प्राप्त होती हैः

$$l = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\quad m = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\quad n = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

8. **दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात तथा दिक् कोज्याएँ:** माना दिये गये दो बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ हैं। तब $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ रेखा PQ के दिक् अनुपात है तथा $\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$ रेखा की दिक् कोज्याएँ हैं,

   जहाँ
$$PQ = \sqrt{\left\{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right\}}$$

9. दी गई दिक् कोज्याओं l, m, n वाली रेखा के समान्तर तथा दिए गए बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = r$.

10. j[kk ij fLFkr fdlh Hkh fcUnq ds funZ'kkad $(lr + x_1, mr + y_1, nr + z_1)$ जहाँ r प्राचल (parameter) हैं तथा ये ऐसे बिन्दु के निर्देशांक है जो रेखा पर बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ से r दूरी पर है।

11. यदि दिक् अनुपात a, b, c दिये हो तो रेखा का समीकरण

$$\frac{x - x_1}{a / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{y - y_1}{b / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{z - z_1}{c / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = r$$

या $$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = R, \quad R = \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

12. इस रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $(ar + x_1, br + y_1, cr + z_1)$ होंगे परन्तु इस स्थिति में यह बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ से दूरी r पर स्थित नहीं होगा।

13. दिये गये बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है से गुजरने वाली तथा एक सदिश $\vec{b}$ के समान्तर सरल रेखा का समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, λ कोई वास्तविक संख्या है।

14. यदि उपरोक्त रेखा मूल बिन्दु से गुजरे तो $\vec{r} = \lambda\vec{b}$.

15. **विषमतलीय रेखाएं:** दो असमान्तर एवं परस्पर न काटने वाली रेखाएँ अर्थात् एक ही समतल में न होने वाली असमतलीय रेखाएं, विषमतलीय रेखाएं कहलाती है।

16. **लघुत्तम दूरी की रेखा:** दो विषम तलीय रेखाएँ AB और CD हो, इनके बीच की दूरी दोनों के लम्बवत होती है, जिसे लघुत्तम दूरी की रेखा कहते हैं।

17. **लघुत्तम दूरी:** दो विषमतलीय रेखाओं

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ और } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$ के मध्य लघुत्तम दूरी

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\left\{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2\right\}}$$

18. यदि लघुत्तम दूरी शून्य हो, तो रेखाएं समतलीय होंगी, जिसका प्रतिबन्ध

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

19. **लघुत्तम दूरी:** दो विषम तलीय रेखाओं

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1 \quad \text{और} \quad \vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$$

के मध्य लघुत्तम दूरी $= d$ $$= \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right|$$

20. दो समतलों $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$ और $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$ के मध्य कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \quad \text{या} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$$

(i) दोनों समतल परस्पर लम्बवत होंगे यदि $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

(ii) दोनों समतल परस्पर समान्तर होंगे यदि $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$, जहाँ λ अचर है।

21. दो समतलों $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ के मध्य कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

(i) दोनों समतल परस्पर लम्बवत होंगे यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

(ii) दोनों समतल समान्तर होंगे, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

22. दो रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$ के मध्य कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|} \quad \text{या} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right)$$

(i) दोनों रेखाएँ परस्पर लम्बवत होंगी, यदि $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$.

(ii) दोनों रेखाएँ परस्पर समान्तर होंगी, यदि $\vec{b}_1 = \lambda \vec{b}_2$, जहाँ λ अचर है।

23. दो रेखाओं $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ और $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$ के मध्य कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

(i) दोनों रेखाएँ परस्पर लम्बवत होंगी, यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

(ii) दोनों रेखाएँ परस्पर समान्तर होंगी, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

24. एक रेखा व समतल के मध्य कोण, समतल के अभिलम्ब व रेखा के मध्य के कोण का पूरक (complement) होता है। माना समतल का समीकरण $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$ और रेखा का समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ है। यदि इनके मध्य कोण θ है, तो

$$\sin\theta = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$

(i) रेखा समतल के लम्बवत होगी, यदि $\vec{b} \times \vec{n}$ या $\vec{b} = \lambda \vec{n}$.

(ii) रेखा समतल के समान्तर होगी, यदि $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$.

25. **समतल का व्यापक समीकरण:**

$$ax + by + cz + d = 0,$$

जहाँ a, b, c, d अचर राशियाँ है तथा a, b, c सभी शून्य नहीं हैं।

(a) x, y, z में प्रथम घात का समीकरण सदैव एक समतल को निरूपित करता है।

(b) समतल के समीकरण में केवल तीन स्वतंत्र अचर होते हैं।

26. **एक बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण:**

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0,$$

जहाँ a, b, c अचर है।

27. **समतल का अन्तः खण्ड रूप में समीकरण:**

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

जहाँ a, b तथा c क्रमशः X, Y तथा Z- अक्षों पर अन्तः खण्ड है।

28. **अभिलम्ब रूप में समतल का समीकरण:**

$$\vec{r}\cdot\hat{n}=p,$$

यहाँ p मूल बिन्दु से समतल की लम्बवत दूरी है तथा $\hat{n}$ समतल के अभिलम्ब इकाई सदिश है।

टिप्पणी: अभिलम्ब में समतल का समीकरण $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ रूप में भी लिखा जा सकता है, यहाँ

$$q=|\vec{n}|\,p.$$

29. **समतल से बिन्दु की दूरी:**

$$d=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}-q|}{|\vec{n}|},$$

जहाँ $\vec{a}$ बिन्दु का स्थिति सदिश है तथा $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ समतल का समीकरण है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 14.1

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $0,\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{4}{5}$ 3. $\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}$ 4. $\sqrt{2}\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

प्रश्नमाला 14.2

1. (i) $\frac{x-5}{0}=\frac{y-7}{0}=\frac{z-9}{0}$; (ii) $\frac{x-5}{0}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-9}{0}$; (iii) $\frac{x-5}{0}=\frac{y-7}{0}=\frac{z-9}{1}$

2. $\vec{r}=\left(2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}\right);\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-4}{-5}$ 3. $\vec{r}=5\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}+\lambda\left(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}\right)$

4. $\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k}\right)$ 5. $\vec{r}=\left(5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}\right)$ 6. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{14}=\frac{z-3}{3}$

7. (i) AB का समीकरण: $\vec{r}=\left(4\hat{i}+5\hat{j}+10\hat{k}\right)+\mu\left(\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}\right);\ \frac{x-4}{1}=\frac{z-5}{1}=\frac{z-10}{3}$

(ii) BC का समीकरण: $\vec{r}=\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)+\lambda\left(\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}\right);\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{5}$; (iii) D के निर्देशांक: (3, 4, 5)

8. $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right);\ 2,1,-6;\ \vec{r}=-\frac{1}{3}\hat{i}+\frac{1}{3}\hat{j}+\hat{k}+\lambda\left(2\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}\right)$

9. $\vec{r}=\left(2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right);\ \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-2}$

10. $\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)+\lambda\left(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}\right);\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-1}$ 11. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{6}$

12. $\vec{r}=\left(5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}\right)$ 13. $\frac{x}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3};\ \vec{r}=\lambda\left(5\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}\right)$

14. $\vec{r}=\left(3\hat{i}-2\hat{j}-5\hat{k}\right)+\lambda\left(11\hat{k}\right);\ \frac{x-3}{0}=\frac{z+2}{0}=\frac{z+5}{11}$

प्रश्नमाला 14.3

1. $\theta=\cos^{-1}(19/21)$ 2. $\theta=\cos^{-1}(2/3)$ 4. $k=-10/7$

5. $\vec{r}=\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right);\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{6}$ 6. $\frac{x+}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{6}$

प्रश्नमाला 14.4

1. $(-1,-1,-1)$ 2. नहीं 3. $\left(\frac{170}{49},\frac{78}{49},\frac{10}{49}\right);\ \frac{3}{7}\sqrt{101}$ 4. $\vec{r}=\left(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}\right);\ \frac{\sqrt{580}}{7}$

प्रश्नमाला 14.5

1. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 2. $2\sqrt{29}$ 3. $\frac{3}{\sqrt{19}}$ 4. $\frac{8}{\sqrt{29}}$ 5. $\frac{3}{\sqrt{59}};\ \frac{59x-253}{1}=\frac{59y-232}{-3}=\frac{592-97}{7}$

प्रश्नमाला 14.6

1. $x-2=0$ 2. $2y-z=0$ 4. $\vec{r}\cdot i=7$ 5. $\vec{r}\cdot\left(\frac{6}{7}i+\frac{3}{7}j-\frac{2}{7}k\right)=7$ या $\vec{r}\cdot(6i+3j-2k)=49$

6. $\vec{r}\cdot\left(\frac{3}{13}i-\frac{4}{13}j+\frac{12}{13}k\right)=\frac{5}{13}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{3}{13},-\frac{4}{13},\frac{12}{13}$ या $\frac{3}{13}x-\frac{4}{13}y+\frac{12}{13}z=\frac{5}{13}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{3}{13},-\frac{4}{13},\frac{12}{13}$

7. $\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{3}i-\frac{1}{3}j+\frac{2}{3}k\right)=4$ 8. $-\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z=2$ 9. $\frac{4}{13}x-\frac{3}{13}y+\frac{12}{13}z=13$ 10. $\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$

प्रश्नमाला 14.7

1. (i) $\cos^{-1}\left(-\frac{4}{21}\right)$; (ii) $\cos^{-1}\left(-\frac{16}{21}\right)$; (iii) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{6}}\right)$ 2. (i) $\theta=\frac{\pi}{3}$; (ii) $\theta=\frac{\pi}{3}$; (iii) $\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$

4. (i) $\lambda=-2$; (ii) $\lambda=2$ 5. $\sin^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{406}}\right)$ 6. $\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{7}{52}}\right)$ 7. $\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

8. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{6}\right)$ 9. $m=-2$ 10. $m=-3$

विविध प्रश्नमाला—14

1. (क) 2. (ग) 3. (घ) 4. (ख) 5. (ग) 6. (ख) 7. (क)
8. (क) 9. (ग) 10. (घ) 11. (ग)

12. $-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}$; $\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$ 13. 13; $-\frac{3}{13},\frac{4}{13},-\frac{12}{13}$

14. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$; $x-2y+z=0$ 15. $x+14y+9z=30$